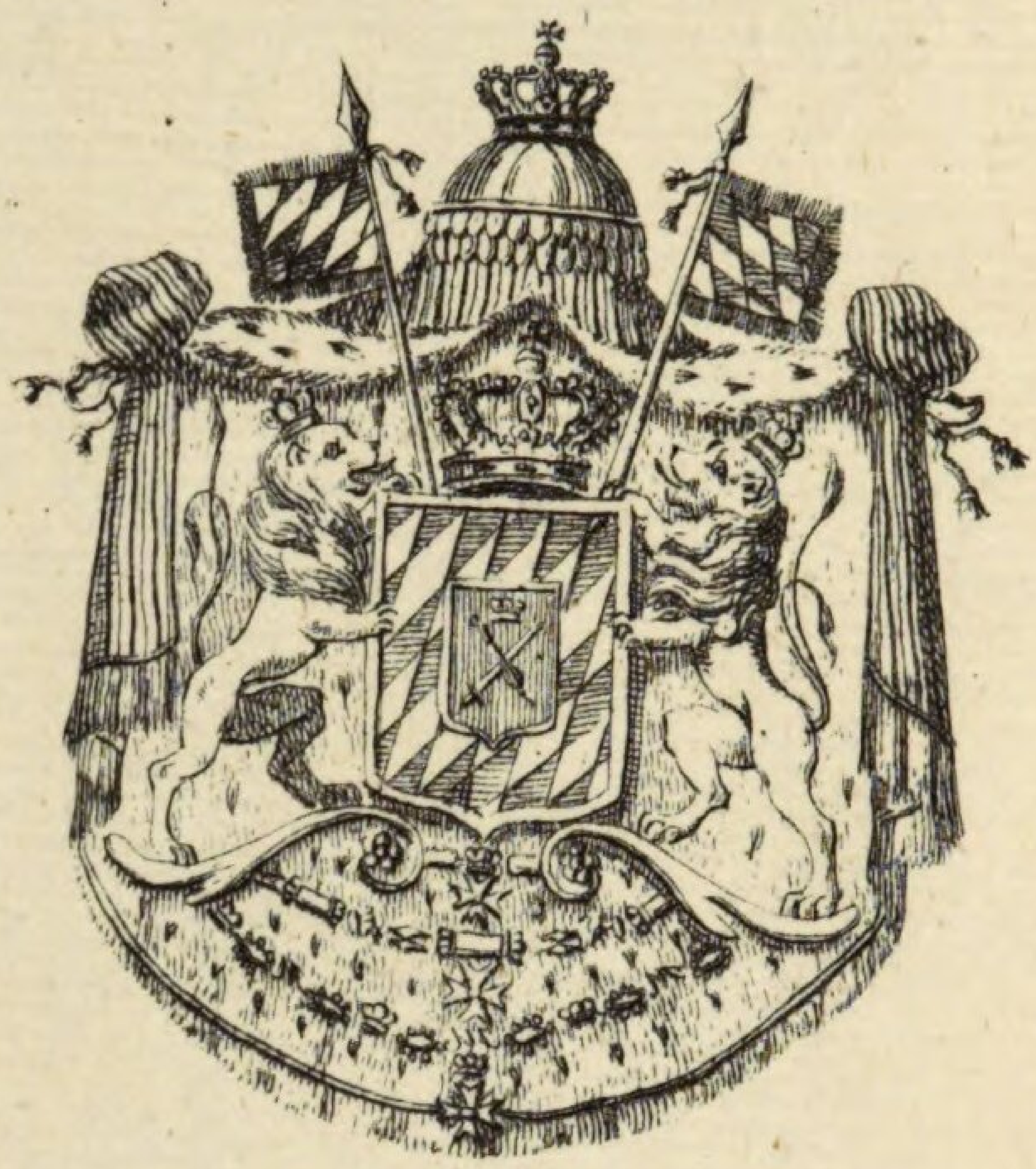
A. Gr. b.
1477.

A.gr.b. 1477

(Euclides)
Müller



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36604495220019

<36604495220019

Bayer. Staatsbibliothek

Mathematisch-critische

Bearbeitung

des

ersten Buchs

der

Elemente Euklid's,

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

von

Johann Wolfgang Müller,

Professor der Mathematik am Gymnasium zu Nürnberg.

Mit einer Kupfertafel.

Nürnberg,
bei Riegel und Wießner.
1821.

Wd. 103.B

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung.

§ 1.

Eine mathematische Erklärung oder eine Definition ist ein Satz, in welchem einem aus verschiedenen sich logisch nicht widersprechenden Merkmalen bestehenden Subject ein Name beigelegt, oder eine Benennung gegeben wird, um das mit dem Namen, als ertheiltem Prädicat, bezeichnete Subiect, von allen andern Subjecten zu unterscheiden.

Anmerkung. Das Prädicat einer mathematischen Erklärung ist also nicht ein neues (zu dem Subject hinzugekommenes, oder mit demselben verbundenes) Merkmal, sondern nur eine Bezeichnung des Inbegriffs der im Subject verbundenen Merkmale, und folglich mit dem Subiect identisch. Nemlich die im Subiect enthaltenen, und einzeln mit Worten bezeichneten Begriffe, werden zusammen vermittelst des Prädicats mit einem andern, meistens einzigen Wort bezeichnet. Daher kann jede mathematische Erklärung umgekehrt werden, und ist auch alsdann noch richtig, wenn sie an und für sich richtig ist. Z. B. wenn man

sagt: Eine ebene Figur mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln ist (eigentlich heißt) ein Quadrat, so ist das Subiect die Verbindung der nicht logisch sich widersprechenden Merkmale: Viereck, gleichseitig und rechtwinklich, und das Prädicat: Quadrat, ist der Name, oder die Benennung dieser verbundenen Merkmale, welches daher auch anders ausgedrückt werden kann, woferne dieser Ausdruck nur so gewählt wird, daß er der Sprache gemäs ist. Z. B. Eine ebene Figur mit vier gleichen Seiten und Winkeln heißt: ein Hauptviereck. (Viereck κατ ἐξοχην.) Lächerlich, oder wenigstens auffallend ist es aber, wenn man sprachwidrige oder unpassende und unverständliche Benennungen wählt, z. B. wenn man diejenigen zwei Abweichungskreise, deren Umfänge durch die Sonnenstandes- und Nachtgleichepunkte gehen, Koluren nennt, d. i. nach Achilles Tatius in seiner isagoge in Arati phaenomena, gegebenen Etymologie, verdeutscht: Stutzschwanzkreise, oder nach Heinfogel's in seiner Verdeutschung von des Sacrobosco sphaera, vermittelst einer unrichtigen Etymologie angegebenen Ausdruck: Waldochsenkreise. Eben so kann die Erklärung: Die gerade vom Mittelpunkt zum Kreisumfang gezogene gerade Linie heißt: ein Halbmesser, (welches Prädicat sehr unverständlich ist, und so viel bedeutet, als halber Durchmesser,) auch so ausgedrückt werden: die gerade vom Mittelpunkt zum Kreisumfang gezogene gerade Linie heißt: ein

ein Strahl, (radius, rayon,) oder Abstands-messer, oder auch nur der Abstand, nemlich eines Punktes des Kreisumfangs vom Mittelpunkt, oder διαστημα nach Euklid. Ferner kann der Inbegriff der Merkmale: eine ebene Figur mit einem in allen Punkten von einem gewissen innerhalb dieser Figur liegenden Punkt gleichweit abstehenden Umfang, auf verschiedne Art als Subject einer mathematischen Erklärung, vermittelst eines Namens, der das Prädicat ausmacht, und welcher den Inbegriff dieser Merkmale bezeichnet, dargestellt werden. Z. B. Die erwähnte Verbindung heiße: ein Cirkel, ein Cyclus, ein Kreis, eine Rundung. Wollte man aber sagen: diese erwähnte Verbindung heiße eine Rundellipse, so wäre dieses wohl auch eine Erklärung, wenn das Prädicat Rundellipse nur der Name oder die Wortbezeichnung der als Subject zusammengestellten Merkmale seyn soll, wollte man aber unter Rundellipse eine Ellipse, in der die große und kleine Axe gleich sind, verstehen, so ist der Satz: die oben erwähnte Verbindung ist eine Rundellipse, keine Erklärung, sondern ein Lehrsatz, in welchem das Prädicat Rundellipse ein eigener Begriff ist, von welchem man erst beweisen muß, daß er dem Subject zukommt, und welcher auch öfters von weiterm Umfang als das Subject seyn kann, in welchem Fall der Satz bei der Umkehrung, (der Versetzung des Prädicats und des Subjects,) unrichtig wird.

§ 2.

Jede mathematische Erklärung ist also **logisch** richtig, weil das Subject derselben keine sich logisch widersprechenden Merkmale enthält, (dergleichen rund und nicht rund, geradlinig und krummlinig u. s. f. wären,) und daher logische Möglichkeit hat, ferner das Prädicat dem Subject zukommt, da es eine blosse Benennung des Subjects ist. So wäre z. B. die Erklärung: ein gleichseitiges und rechtwinkliches Dreieck heißt ein Trigonoid, vollkommen logisch richtig, 1) weil die im Subiect enthaltenen Merkmale, drei gleiche Seiten und ein rechter Winkel, sich nicht logisch widersprechen, und daher, dem blosen Begriffe nach, neben einander bestehen können, und 2) weil man diesem Subject einen beliebigen Namen geben kann, wenn er nicht schon einem andern Subject beigelegt worden ist.

Anmerkung. Nur ist zu wünschen, daß man diese Benennungen nicht ohne Grund vervielfältige, und das Studium der Mathematik dadurch ohne Noth erschwere. Dergleichen ist, wenn in der Astronomie gerade Aufsteigung der Mitte des Himmels, cor coeli, gerade Aufsteigung des Mittagskreises, Rectascension des geocentrischen Zenits, gerade Aufsteigung des wahren Scheitelpunkts, als verschiedene Benennungen des nemlichen Gegenstandes, ferner Länge des Neunzigsten und Zenitlänge, eben so: reducirte Polhöhe, verbesserte Polhöhe, Declination des geocentrischen Zenits, Abweichung des wahren Scheitelpunkts, gebraucht werden. Ein Beispiel des entgegengesetzten Fehlers, da man

man nemlich zweierlei Gegenständen einerlei Namen giebt, ist, daß man sowohl den Winkel, welchen der Abweichungskreis, als den, welchen die Ecliptik mit dem Verticalkreis macht, den parallactischen Winkel nennt.

§ 3.

Die Richtigkeit einer mathematischen Erklärung hängt also nicht von der Bestimmung ab, ob das Prädicat dem Subject zukommt, (wie bei den Grundsätzen und Lehrsätzen,) weil das Prädicat ein bloser Name, oder eine blose Wortbezeichnung des Subjects ist, sondern nur von der Darstellbarkeit des dem Subiect in der Anschauung entsprechenden Gegenstandes, d. h. von der Möglichkeit der Construction des Subjects, oder davon: ob die Merkmale, aus denen das Subject zusammengesetzt ist, auch in der Anschauung neben einander bestehen können, d. h. ob das Subject reale Möglichkeit hat. Z. B. Die Richtigkeit der Erklärung: ein gleichseitiges und rechtwinkliches Dreieck heißt: ein Trigonoid, hängt davon ab, ob in einer dreiseitigen Figur drei gleiche Seiten und ein rechter Winkel in der Anschauung zugleich bestehen können, diese Figur mag übrigens genannt werden wie man will, ein Trigonoid, oder (nach Heßlings Art) ein Hauptdreiseit u. d. gl. diese Benennung (wenn sie auch sprachwidrig und gezwungen seyn sollte,) hat auf die Richtigkeit der Erklärung keinen Einfluß, wenn sie nur nicht auch bei irgend einer andern Erklärung gebraucht wird.

§ 4.

§ 4.

So lange nun die reale Möglichkeit, oder die Möglichkeit der räumlichen Darstellung des Subjects, wenn dieses sich auf eine steetige oder räumliche Größe bezieht, nicht gezeigt ist, bleibt die mathematische Erklärung unbrauchbar, und die Lehrsätze, welche auf ihr beruhen, sind, wenn ihre Wahrheit auch streng bewiesen ist, dennoch nur hypothetisch gültig, nemlich nur unter der Voraussetzung der realen Möglichkeit des Subjects der Erklärung. So kann man z. B. streng erweisen: daß in dem vorhin genannten Trigonoid, die drei Winkel rechte Winkel sind, und der äussere ein stumpfer Winkel ist, wenn das Trigonoid als Art unter die Gattung der geradlinigen Dreiecke gehört. Allein diese erwiesenen Lehrsätze sind nicht deswegen ungültig, weil sie andern auch bewiesenen Lehrsätzen widersprechen, denn dieser Widerspruch würde nur den richtigen Schluß begründen, daß entweder die einen oder die andern falsch sind, welche aber richtig und welche unrichtig sind, läßt sich nur durch die Untersuchung entscheiden, auf welchen Erklärungen sie beruhen, und welche von diesen Erklärungen reale Möglichkeit hat. Es müßte also gezeigt werden, wie ein Trigonoid zu beschreiben ist, oder die Aufgabe: ein Trigonoid zu beschreiben, mit Auflösung und Beweis durchgeführt werden, welches aber unmöglich ist, wenn das Trigonoid ein geradliniges Dreieck ist, hingegen möglich, wenn es ein Kugeldreieck ist. In diesem Fall hat also die Erklärung: ein gleichseitiges rechtwinkliches Dreieck heißt ein

Tri-

Trigonoid, objective Gültigkeit, weil das Subject der Erklärung in der Anschauung dargestellt, oder construirt werden kann.

§. 5.

Uibrigens wäre es zweckmäsig, wenn die Prädicate der mathematischen Erklärungen nicht nur so gewählt würden, daß sie passende deutsche und sprachrichtig ausgedrückte Benennungen wären, z. B. Kreis, statt Cirkel, Dreieck, statt Triangel, Walze, statt Cylinder, Hauptviereck, statt Quadrat u. d. gl. sondern auch, nach Art der neuesten chemischen Bezeichnungen, (da nemlich statt Kochsalz, salzsaures Natron, statt Salpeter, salpetersaures Kali, u. s. f. gesagt wird,) die Merkmale des Subjects angäben, dergleichen man auch schon viele angenommen hat, z. B. Dreieck, Viereck, gleichseitiges Dreieck, gleichschenkliches Dreieck, Kegelschnitte, Parabel, (eingleichende Kegelschnittslinie,) Ellipse (ergänzende Kegelschnittslinie,) Hyperbel, (überschüßige Kegelschnittslinie,) indem nemlich, wie bekannt, die Benennungen: παραβολη, ελλειπσις und ὑπερβολη sich auf die Vergleichung des Quadrats der Ordinate y mit dem Rechteck aus Parameter p und Absciße x beziehen, und in der Parabel $y^2 = px$, in der Ellipse y^2 kleiner als px, so daß zu y^2 eine Ergänzung z gesetzt werden muß, wenn eine Gleichung $y^2 + z = px$ entstehen soll, in der Hyperbel hingegen y^2 grösser als px ist, d. h. y^2 das Rechteck px um z übertrift, indem nemlich $y^2 = px + z$ ist.

§ 6.

Sogenannte Realerklärungen oder genetische Definitionen sind eigentlich Aufgaben, in Form der Lehrsätze vorgetragen. Es ist nemlich bekannt, daß jede Aufgabe als Lehrsatz dargestellt werden kann, dessen Hypothesis oder Bedingung, oder Subject, die Auflösung der Aufgabe: und dessen Thesis, oder Behauptung oder Prädicat, der dem Satz der Aufgabe gemäs zu construirende (zu beschreibende) Gegenstand, als construirter oder gegebener Gegenstand betrachtet, ist. Wenn nun eine Aufgabe das Beschreiben einer krummen Linie, (z. B. des Kreises,) oder eines runden Körpers, (z. B. einer geraden Walze, eines geraden Kegels, einer Kugel,) verlangt, so kann solche nur vermittelst der Umdrehung einer steetigen Größe aufgelöset werden. So ist z. B. die Umdrehung einer geraden Linie in einer Ebene, und um einen in dieser Ebene unbeweglichen Punkt, die Auflösung der Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben. Ferner: die Umdrehung eines Halbkreises um einen seiner Durchmesser, dessen Endpunkte ihre Lage nicht ändern, die Auflösung der Aufgabe: eine Kugel zu beschreiben. Es ist sonderbar, daß die neuern Geometer die Aufgaben: einen geraden Kegel, eine gerade Walze, oder eine Kugel zu beschreiben, für Postulate halten, und sie in diese Rubrik setzen, da doch, ihrer Meinung nach, die ganz richtig ist, ein Postulat ein solcher Satz ist, welcher fordert, daß man sich etwas als möglich vorstellen soll, ohne daß die Art der Möglichkeit, oder die Construction gezeigt werden kann. Ein solches Postulat ist

ist z. B. der Satz: eine gerade Linie zu ziehen, weil keine Auflösung bei ihm statt findet. Denn wollte man die Art der Möglichkeit so angeben: Man lasse einen Punkt sich in einerlei Richtung fortbewegen, so würde dieses so viel heisen, als: man lasse einen Punkt sich in einer geraden Linie fortbewegen, oder mit andern Worten: Man ziehe eine gerade Linie. Ein Postulat ist also wie eine Aufgabe, die aber keine Auflösung hat, anzusehen. Obige Sätze haben aber eine Auflösung, also sind sie keine Postulate, und da auch ein Beweis bei ihnen statt findet: z. B. daß bei dem runden Körper, der durch das Umdrehen eines Halbkreises um seinen Durchmesser entsteht, alle geraden Linien, die von dem Mittelpunkt dieses Halbkreises zur Oberfläche des entstandenen runden Körpers gezogen werden, gleich sind, also dieser Körper eine Kugel ist, so sind sie wirkliche Aufgaben. Zwar sagen die neuern Geometer mit Kant: die Bewegung gehöre nicht in die Geometrie, weil alle Theile des unendlichen Raums unbeweglich sind. Allein sie bedenken nicht, daß das Decken der Figuren, um ihre Congruenz darzuthun, ohne Versetzung der einen Figur aus dem Ort den sie einnimmt, an den Ort der andern Figur, nicht statt findet, die Versetzung aber eines Gegenstandes aus einem Ort in einen andern, Bewegung desselben ist. Auch wenden sie ohne Bedenklichkeit das Umdrehen der Figuren bei verschiedenen Beweisen stereometrischer Sätze an, z. B. bei dem Beweis des Satzes: daß die Kugel zwei Drittheile derjenigen Walze ist, deren Höhe und Grundflächendurchmesser dem Ku-

gelburchmesser gleich ist. Eben so bedient sich Archimedes im 24 Satz, des ersten Buchs über Kugel und Walze, (nach Hauber's Übersetzung, nach Sturm's Übersetzung aber, im 25 Satz,) der Umdrehung eines ordentlichen Vielecks um den Durchmesser des Kreises, in welchen es beschrieben ist, einen gewissen, aus geraden und abgekürzten Kegeln zusammengesetzten Körper zu construiren. Zwar ist die Behauptung richtig, daß bei dergleichen Aufgaben, bei denen die Auflösung auf der Umdrehung gewisser steetigen Größen beruht, der Beweis so leicht und einfach ist, daß er meistens weggelassen werden kann. Allein deswegen sind diese Aufgaben dennoch keine Postulate, (weil Postulate keine Auflösung gestatten,) hingegen können sie in dieser Rücksicht als Grundsätze dargestellt werden. Z. B. Die Aufgabe: eine Kugel zu beschreiben, nebst ihrer Auflösung: „man drehe einen Halbkreis um seinen Durchmesser," kann so als Grundsatz umgeformt werden: Wenn ein Halbkreis sich um einen seiner Durchmesser, der in unverrückter Lage bleibt, dreht, so ist der so entstehende Körper eine Kugel. Dabei wird die Erklärung: ein Körper bei dem alle Punkte seiner Oberfläche gleichen Abstand von einem gewissen innerhalb dieses Körpers befindlichen Punkt haben, heißt eine Kugel, vorausgesetzt. Nimmt man an, man wisse nichts von dem in dieser Erklärung ausgedrückten Merkmal der Kugel, (die Gleichheit der Halbmesser nemlich betreffend,) und betrachtet man in dem vorigen als Grundsatz aufgestellten Satz, das Prädicat Kugel, nicht als einen Begriff, (dessen

Merkmal Gleichheit der Halbmesser des Körpers ist,) sondern nur als eine Bezeichnung des Subjects mit Worten, oder als eine Benennung, in welchem Fall man auch, um sich die Sache deutlicher vorzustellen, ein neues Wort, z. B. Rundkörper, gebrauchen könnte, wo gewiß mancher sogleich fragen würde, was ein Rundkörper ist? so wird nun obiger Grundsatz, in dieser Beziehung eine blose Erklärung seyn, nemlich: wenn ein Halbkreis sich um einen seiner Durchmesser, der in unverrückter Lage bleibt, dreht, so heißt der so entstehende Körper: ein Rundkörper. Oder: Ein Körper, der durch das Umdrehen eines Halbkreises um einen unverrückten Durchmesser beschrieben wird, heißt ein Rundkörper. Hierauf würde nun, vermittelst dieser Erklärung, der Beweis des Lehrsatzes: daß jeder Punkt der Oberfläche eines Rundkörpers gleichweit von einem gewissen innerhalb dieses Körpers befindlichen Punkt absteht, gegeben werden. Und in dieser Beziehung ist auch wirklich im eilften Buch der Elemente Euklid's die 14 Erklärung für die Kugel zu verstehen, so wie ebendaselbst die 18 Erkl. für den Kegel, und die 21 Erkl. für die Walze. Es entsteht aber nun die Frage: warum führt Euklid im ersten Buch seiner Elemente die Beschreibung eines Kreises unter den Postulaten oder Forderungen auf. Die Antwort ist: da es ihm gutdünkte, vom Kreise eine Namenerklärung zu geben, so konnte er nicht noch eine Realerklärung vom Kreise geben, denn dieses Verfahren wäre fehlerhaft gewesen. Er mußte also den Satz: einen Kreis zu beschreiben, das heißt, (nach

dem Begriff, den das Subject seiner Namen-Erklärung vom Kreise giebt,) eine ebene Figur, in der alle Punkte des Umfangs gleichweit von einem innerhalb dieser Figur liegenden Punkt abstehen, zu beschreiben, entweder als Aufgabe vortragen, oder in einen Grundsatz umformen. Allein er stellte ihn unter die Postulate, und diese Stellung wäre zu tadeln, wenn Euklid unter einem Postulat einen solchen Satz verstanden hätte, in welchem das Zugestehen der realen Möglichkeit des Subjects, oder der Darstellung desselben im Raum, d. h. der Construction des Subjects, gefordert wird, weil diese Darstellung nicht gezeigt, oder die Auflösung nicht angegeben, oder die Art der realen Möglichkeit nicht bestimmt werden kann, wie z. B. die Sätze sind: 1) Zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen, 2) eine gegebene gerade Linie zu verlängern, 3) einen schiefen Kegel, oder eine schiefe Walze zu beschreiben, bei denen das: wie geschieht dieses? nicht gelehrt werden kann. Euklid hingegen versteht unter einem Postulat einen Satz, welcher fordert, einen solchen räumlichen Gegenstand zu beschreiben, dessen Construction so einfach ist, daß die Einbildungskraft eines jeden Menschen sehr leicht solche hervorbringt, ohne daß man nöthig hat, die Art derselben anzugeben. Da also jedermann von selbst einsieht, daß wenn er das Schema für den Begriff einer ebenen Figur, bei der alle Punkte des Umfangs gleichweit vom Mittelpunkt abstehen, mittelst der Einbildungskraft darstellen soll, er sich nur eine, um einen festen Punkt in einer Ebene sich drehende gerade Linie vorstellen darf, deren einer Endpunkt

durch

durch seine Bewegung die Form des Kreisumfangs darstellen wird, so hielt Euklid für überflüssig, diese leichte und einfache Construction näher zu bestimmen, nnd setzte sie daher als allgemein bekannt voraus, indem er seinen Satz als Forderung aufstellte.

§ 7.

Was endlich die Ordnung der Sätze in einem geometrischen System betrift, so ist gewiß die wissenschaftliche der blos anschaulichen vorzuziehen. Unter der anschaulichen Anordnung verstehe ich nemlich die Zusammenstellung derjenigen Sätze, bei denen die Schemata der Subjecte Gegenstände von einerlei Art sind, so daß die Sätze von der Lage der Linien besonders geordnet werden, eben so die Sätze, welche geradlinige Figuren, z. B. Dreiecke, Vierecke u. s. f. betreffen, wieder besonders zusammengestellt werden, und so auch die Sätze die sich mit dem Kreise beschäftigen. Wenn man, aus Vorliebe für diese Ordnung, ihr sogar die Gründlichkeit der Beweise, oder die Eleganz der Construction nachsetzt, so ist sie tadelnswerth. Die Gegenstände der Geometrie lassen sich überhaupt nicht so leicht classificiren, wie die Gegenstände der Naturgeschichte, z. B. in der Botanik, in der Mineralogie u. dgl. So setzt die Anschauung eines geradlinigen Dreiecks schon die Anschauung einer durch drei Punkte gelegten Ebene, also die reale Möglichkeit dieser Ebene voraus. Unter wissenschaftlicher Anordnung der Sätze verstehe ich diejenige Folge der Sätze, bei welcher darauf Bedacht genommen

wird,

wird, daß jeder Satz da seine Stelle erhält, wo die nächsten vorher bewiesenen Sätze zum Beweis seiner Richtigkeit hinlänglich sind. So hat z. B. der fünfte Satz des vierten Buchs der Elemente Euklid's seine wissenschaftliche Stelle sogleich nach dem eilften Satz des ersten Buchs, und eben so hat der zwölfte Satz des dreizehnten Buchs seine wissenschaftliche Stelle zwischen dem ein und dreißigsten und zwei und dreißigsten Satz des dritten Buchs. Denn obgleich Euklid sich im Beweis desselben auf den 20 Satz, des 6ten Buchs bezieht, so reicht man dennoch schon mit dem 4ten Satz des zweiten Buchs aus. Es wäre zu wünschen, daß da schon so viele sich mit der anschaulichen Ordnung beschäftiget haben, ein geübter und scharfsinniger Geometer, die wissenschaftliche Anordnung aller Sätze in den Elementen Euklid's übernehmen möchte.

Erstes Buch der Elemente.

Erklärungen.

1) Eine ausgedehnte in das Unendliche theilbare Größe, in welcher das Ende eines jeden Theils zugleich der Anfang eines andern Theils ist, heißt: ein räumlicher Gegenstand, oder eine steetige Größe.

2) Ein Gegenstand im Raum, der selbst nicht räumlich oder theilbar ist, heißt: ein Punkt.

3) Ein räumlicher Gegenstand, oder eine solche steetige Größe, welche nur eine einzige Abmessung, nemlich der Länge nach, aber keine Breite und Höhe hat, heißt: eine Linie.

4) Eine Linie, in der alle Theile eine gleichförmige Lage haben, heißt: eine gerade Linie.

5) Eine solche steetige Größe, welche nur zwei Abmessungen, nemlich der Länge und Breite nach, aber keine Höhe hat, heißt: eine Fläche.

6) Eine Fläche, in der alle geraden Linien, die durch beliebige in dieser Fläche angenommenen Punkte ge-

zogen werden ganz liegen, heißt: eine ebene Fläche, oder eine Ebene.

7) Die gegenseitige Lage zweier zusammentreffenden geraden Linien heißt: ein geradliniger Winkel.

8) Zwei geradlinige Winkel, die einen Schenkel gemein haben, und deren zweite Schenkel ausser einander in einer geraden Linie liegen, heißen: Nebenwinkel.

9) Zwei geradlinige Winkel, die einen gemeinschäftlichen Scheitelpunkt haben, und bei denen jeder Schenkel des einen Winkels mit den entsprechenden Schenkel des andern Winkels in einer geraden Linie, aber ausser einander liegt, heißen: Scheitelwinkel.

10) Diejenige gerade Linie, welche auf einer andern gerade Linie so steht, daß die Nebenwinkel gleich sind, heißt: eine senkrechte Linie, und die gleichen Nebenwinkel heißen: rechte Winkel.

11) Ein Winkel, der größer ist als ein rechter, heißt: ein stumpfer Winkel.

12) Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heiß: ein spitziger Winkel.

13) Das Aeusserste einer steetigen Größe, welches keinen Theil mehr von ihr ausmacht, heißt: ihre Grenze.

14) Ein von einer oder mehrern Grenzen eingeschloßener Raum, heißt: eine Figur.

15) Eine ebene Figur, deren Grenze eine solche Linie ist, daß die von jedem in ihr angenommenen Punkt zu einem gewissen innerhalb dieser ebenen Figur liegen-

genden Punkt gezogenen geraden Linien gleich sind, heißt: ein Kreis, und dessen Grenze: der Umfang.

16) Der im Kreis so liegende Punkt, daß die nach der angegebenen Art zu ihm gezogenen geraden Linien gleich sind, heißt: der Mittelpunkt.

17) Jede gerade durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie, deren beide Grenzen in dem Umfang des Kreises liegen, heißt: ein Durchmesser.

18) Der von einem Durchmesser abgeschnittene Theil des Kreises, heißt: ein Halbkreis.

19) Der von irgend einer geraden Linie abgeschnittene Theil des Kreises, heißt; ein Kreisabschnitt.

20) Eine Ebene, die von geraden Linien begrenzt wird, heißt: eine ebene geradlinige Figur, und die geraden Linien, von welchen die Ebene begrenzt wird, heißen: die Seiten der ebenen geradlinigen Figur.

21) Eine Figur mit drei Seiten, heißt: ein Dreieck.

22) Eine ebene Figur mit vier Seiten, heißt, ein Viereck.

23) Eine ebene Figur mit mehr als vier Seiten, heißt: ein Vieleck.

24) Ein Dreieck mit drei gleichen Seiten, heißt: ein gleichseitiges Dreieck.

25) Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten, heißt; ein gleichschenkliches Dreieck.

26) Ein Dreieck mit drei ungleichen Seiten, heißt; ein ungleichseitiges Dreieck.

27) Ein Dreieck mit einem rechten Winkel, heißt: ein rechtwinkliches Dreieck.

28) Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel, heißt: ein stumpfwinkliches Dreieck.

29) Ein Dreieck mit drei spitzigen Winkeln, heißt: ein spitzwinkliches Dreieck.

30) Ein gleichseitiges Viereck mit vier rechten Winkeln, heißt: ein Quadrat, oder ein gleichseitiges Rechteck.

31) Ein nicht gleichseitiges Viereck mit vier rechten Winkeln, heißt: ein (längliches) Rechteck.

32) Ein gleichseitiges Viereck mit vier schiefen Winkel, heiß: eine Raute.

33) Ein Viereck mit gegenüberliegenden gleichen Seiten und vier schiefen Winkeln, heißt: eine längliche Raute.

34) Jedes andere Viereck heißt: ein Trapezium.

Bemerkung. Euklid macht nemlich keinen Unterschied zwischen Trapezien und Trapezoiden. Man könnte statt Trapezien auch halbordentliche Vierecke, und statt Trapezoiden, unordentliche Vierecke sagen.

35) Zwei in einerlei Ebene befindliche gerade Linien, von welchen alle Punkte der einen Linie ausserhalb der andern Linie liegen, soweit man auch die beiden Linien vor- und rückwärts verlängern mag, heissen neben einander fortlaufende Linien, oder Parallelen. (Oder auch: Die in einerlei Ebene befindlichen geraden Linien, von denen die eine ganz neben der an-

dern

dern liegt, so weit auch beide Linien nach entgegengesetzten Richtungen verlängert werden, heißen: neben einander fortlaufende Linien, oder Parallelen, oder Nebenlinien.)

Forderungen.

1) Von einem gegebenen Punkt zu einem andern gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen.

2) Eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie ins unbegrenzte zu verlängern.

3) Durch drei gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte, eine Ebene zu legen.

Grundsätze.

1) Größen, die einer gewissen Größe gleich sind, sind selbst gleich.

2) Zu Gleichem Gleiches hinzugesetzt gibt Gleiches.

3) Von Gleichem Gleiches weggenommen, giebt auch Gleiches.

4) Aber zu Ungleichem Gleiches hinzugesetzt, giebt Ungleiches.

5) Und von Ungleichem Gleiches weggenommen, giebt Ungleiches.

6) Das Doppelte gleicher Größen ist gleich.

7) Die Hälften gleicher Größen sind gleich.

8) Größen, welche sich decken, (d. h. congruente Größen,) sind gleich.

9) Das Ganze ist größer als jeder beliebige Theil desselben.

10) Alle rechten Winkel sind gleich.

11) Zwei gerade Linien schliesen keinen Raum ein.

12) Wenn zwei gerade Linien etwas Gemeinschäftliches haben, so ist dieses ein Punkt, woferne sie nicht in einer einzigen geraden Linie liegen sollen.

13) Die Grenzen der Linien sind Punkte, und die Grenzen der Flächen sind Linien.

Bemerkung. Diesen letzten Satz führt Euklid als eine Erklärung auf, er ist aber eigentlich ein Grundsatz, denn er folgt erst aus den Erklärungen der Grenze und des Punktes, wie folgender Schluß zeigt: Wäre die Grenze der Linie kein Punkt, so wäre sie theilbar, (2 Erkl.) folglich ein Theil der Linie, also keine Grenze der Linie, (13 Erkl.) welches sich widerspricht.

Eben so: wäre die Grenze der Fläche keine Linie, so wäre sie der Breite nach theilbar, folglich ein Theil der Fläche, also keine Grenze der Fläche, (13 Erkl.) welches sich widerspricht.

Erster Satz. Aufgabe. (Fig. 1.)

Aus einem gegebenen Punkt A als Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang durch einen andern gegebenen Punkt C geht.

Auflösung.

Die Ebene, in welcher der Kreis beschrieben werden soll, ist entweder gegeben oder nicht.

Erster Fall. Wenn diese Ebene gegeben ist, so ziehe man vom Punkt A zum Punkt C eine gerade Linie

AC,

AC, und drehe solche in dieser Ebene um den Punkt A, bis sie wieder die erste Lage AC hat, so beschreibt sie durch dieses Umdrehen einen Kreis, und ihr zweiter Endpunkt C den Umfang desselben, der durch den gegebenen Punkt C geht.

Zweiter Fall. Wenn diese Ebene nicht gegeben ist, so ziehe man die gerade Linie AC, nehme irgendwo einen dritten von A und C verschiedenen Punkt B an, der nicht in der geraden Linie AC oder ihrer Verlängerung ist, und lege durch die drei Punkte A, C und B eine Ebene, (3 Ford.) betrachte diese Ebene als eine gegebene, und verfahre übrigens nach dem ersten Fall.

Beweis.

Da die gerade Linie AC sich in einer Ebene dreht, und in jeder Lage nicht nur ihr einer Endpunkt A unverrückt bleibt, sondern auch ihre Größe sich nicht ändert, so daß, wenn sie in ihre erste Lage zurückkehrt, ihr Endpunkt C wiederum im gegebenen Punkt C liegt, so beschreibt sie eine ebene Figur, und zwar eine solche, in der alle vom Punkt A zu beliebigen Punkten ihres Umfangs gezogenen geraden Linien der AC gleich, also auch einander gleich sind. (1 Grunds.) Folglich ist diese Figur ein Kreis. (15 Erkl.)

N. 1 Zweiter Satz. Aufgabe. (Fig. 1.)

Auf einer gegebenen geraden Linie AB in einer gegebenen Ebene ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Auf-

Auflösung.

Aus dem gegebenen Endpunkt A der geraden Linie AB, als angenommenen Mittelpunkt, beschreibe man in der gegebenen Ebene einen Kreis, dessen Umfang durch den andern Endpunkt B dieser Linie geht, und aus dem Endpunkt B in dieser Ebene einen Kreis, dessen Umfang durch den Endpunkt A geht. (1 S.) Diese beiden Kreise schneiden sich in gewissen Punkten, weil ein Theil des einen Kreises in dem andern Kreis liegt. Von einem dieser Durchschnittspunkte, welchen man nehmen will, z. B. von C, ziehe man nach den Endpunkten A und B die beiden geraden Linien CA und CB, so ist die Figur ACB ein gleichseitiges Dreieck.

Beweis.

Da der Punkt A als Mittelpunkt des ersten Kreises angenommen wurde, so ist AC=AB, (15 Erkl.) und da der Punkt B der Mittelpunkt des zweiten Kreises ist, so ist BC=AB, also auch BC=AC. (1 Grundſ.) Folglich sind die geraden Linien AC, BC und AB gleich, daher ist die dreiseitige Figur ACB ein gleichseitiges Dreieck. (24 Erkl.)

Bemerkung.

Hier bleibt noch unbestimmt, in wie vielen Punkten die beiden Kreise sich schneiden. Sollten sie sich auch in drei und mehr Punkteu schneiden, so ändert dieses nichts weder an der Auflösung, noch am Beweis.

N. 2 Dritter Satz. Aufgabe.

An einem gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die einer der Lage und Größe nach gegebenen geraden Linie gleich ist.

Auflösung und Beweis. Siehe die deutsche Uibersetzung der Elemente Euklid's, von Lorenz, oder die latein. Uibersetzung von Bärmannn.

Bemerkung.

Die Euklidische Auflösung dieser Aufgabe ist von vielen neuen Geometern nicht aus dem richtigen Standpunkt betrachtet, und daher von ihnen, ihrer Meinung nach einfacher, so angegeben worden: Man beschreibe aus dem gegebenen Punkt A, (Fig. 2 in Lorenz Uibers.) als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, welcher der gegebenen geraden Linie BC gleich ist, einen Kreis, so ist jeder Halbmesser desselben, (z. B. der gezogene Halbmesser AL,) die verlangte gerade Linie, die der gegebenen BC gleich ist. Nun entsteht aber die Frage; wie beschreibt man einen Kreis, dessen Mittelpunkt A, und dessen Halbmesser =BC ist, wenn man nicht mechanisch verfahren soll, da man freilich mit dem Cirkelinstrument die Länge der BC fassen und abtragen kann, wovon aber hier die Rede nicht ist. Sollte der Kreis aus dem Punkt B, als Mittelpunkt, beschrieben werden, so dürfte man sich nur die Linie BC um B in einer Ebene drehend vorstellen. Wäre ferner an A eine gerade Linie AE von unbestimmter Länge gezogen, und auf

ihr

ihr die AL=BC abgeschnitten, so dürfte man sich nur AL um A als Mittelpunkt in einer Ebene drehend vorstellen, um einen Kreis zu beschreiben, bei dem jeder Halbmesser =BC wäre. Aber das Abschneiden der AL=BC von der AE setzt schon den folgenden Satz Euklid's voraus, in welchem erst die Auflösung dieser Aufgabe gezeigt wird. Man müßte also, um consequent zu verfahren, die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe so ausdrücken: Man trage die gegebene gerade Linie BC von dem gegebenen Punkt B zu dem gegebenen A, so daß ihr Endpnnkt B im Punkt A liegt. Diese Auflösung beruht blos auf der Anschauung der Versetzung der Linie BC von dem Punkt B zu dem Punkt A. Wie diese Versetzung geschehen soll, kann nicht bestimmt werden, also ist die Möglichkeit dieser Versetzung eine Forderung, (ein Postulat,) so wie das Legen eines Dreiecks auf das andere, bei dem Beweis der Congruenz zweier Dreiecke. Allein, wenn die Linie BC von ihrer Stelle weggenommen, und an den Punkt A gesetzt wird, so ist nun an den Punkt B keine Linie in der Lage BC mehr vorhanden. Es verhält sich damit nemlich eben so, als wenn man die Auflösung der Aufgabe: Auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie M ein Dreieck zu beschreiben, das mit dem gegebenen Dreieck N congruent ist, auf folgende Art darstellen wollte: Man versetze das Dreieck N so an die Linie M, daß eine Seite in der Linie M liegt. Da jedoch, dem Sinn der Aufgabe gemäs, die Linie BC an ihrem Ort am

ge-

gegebenen Punkt B auch dann ist, wenn man AL=BC gemacht, d. h. die Aufgabe aufgelöset hat, so kann diese Auflösung nur nach der Art, wie sie Euklid giebt, und nach der von ihm gezeigten Construction ausgeführt werden, so daß man dasjenige Schema, in der durch die Einbildungskraft erzeugten Anschauung erhält, von welchem die zweite Figur in Lorenz Uebersetzung das sinnliche Bild ist.

N. 3 Vierter Satz. Aufgabe.

Von der größern zweier gegebenen Linien, einen Theil abzuschneiden, welcher der kleinern gegebenen Linie gleich ist.

Auflösung und Beweis. Siehe die Uibersetzungen von Lorenz oder von Bärmann.

N. 4 Fünfter Satz. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, in welchem zwei Seiten, nebst dem von ihnen gebildeten Winkel, gleich sind, sind congruent.

Beweis. Siehe die Uibersetz. von Lorenz oder von Bärmann.

N. 5 Sechster Satz. Lehrsatz.

In jedem gleichschenklichen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

Beweis. Siehe die Uibers. von Lorenz oder Bärmann.

Zu-

Zusatz.

Daher hat jedes gleichseitige Dreieck drei gleiche Winkel.

N. 6 Siebenter Satz. Lehrsatz.

Ein Dreieck, in welchem zwei Winkel gleich sind, ist ein gleichschenkliches Dreick.

Beweis. Siehe die Uibers. von Lorenz oder Bärmann.

N. 7 Achter Satz. Lehrsatz. (Fig. 2 und 3.)

Wenn zwei Dreiecke ACB und ADB eine Seite AB gemeinschäftlich haben, und überdieß die Seite AD des zweiten Dreiecks der Seite BC des ersten Dreiecks, gleich ist, so nemlich, daß die gleichen Seiten von einerlei Endpunkt der gemeinschäftlichen Seite AB ausgehen, (z. B. AD und AC vom Endpunkt A, und BD und BC vom Endpunkt B,) endlich die Spitzen C und D der beiden gegebenen Dreiecke an einerlei Seite der gemeinschäftlichen geraden Linie AB liegen, so fallen diese Spitzen C und D in einander.

Beweis.

Gesetzt, die Spitze D des einen gegebenen Dreiecks ADB falle nicht in die Spitze C des andern gegebenen Dreiecks ACB, so liegt die Spitze D des einen gegebenen Dreiecks entweder in einer Seite des andern Dreiecks, oder ausserhalb oder innerhalb dieses andern Dreiecks.

Erster

Erster Fall. Die Spitze D liege in AC oder deren Verlängerung über C, so ist die Seite AD entweder kleiner oder größer als die Seite AC, gegen die Voraussetzung.

Zweiter Fall. Die Spitze D liege ausserhalb des Dreiecks ACB. Man verbinde die Winkelpunkte C und D mit der geraden Linie CD. Da nun AD=AC, (nach der Annahme,) so ist ADC=ACD, (6 Satz.) und da BCD ein Theil des Winkels ACD, also ACD größer als BCD ist, (9 Grundś.) so ist auch ADC größer BCD, und da ferner BDC größer als ADC ist, (9 Grundś.) so ist auch BDC größer als BCD. Allein es ist BD=BC, (nach der Annahme,) daher BDB=BCD, (6 Satz,) welches dem Vorigen widerspricht.

Dritter Fall. Die Spitze D liege innerhalb des Dreiecks ACB. Man verlängere AC nach E und AD nach F. Da AD=AC, so ist ECD=FDC. (6 Satz.) Es ist aber ECD größer als BCD, folglich auch FDC größer als BCD, daher um so mehr BDC größer als BCD. Nun ist aber BD=BC, (nach der Annahme,) also BDC=BCD, (6 Satz,) welches dem Vorigen widerspricht.

N. 8 Neunter Satz. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, in welchen die einzelnen Seiten des einen, den einzelnen Seiten des andern Dreiecks gleich sind, sind congruent.

Be-

Beweis. Siehe die Uibers. v. Lorenz oder Bårmann.

N. 9 Zehnter Saz. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel in die Hålfte zu theilen.

Auflös. und Beweis. Siehe die Uibers. von Lorenz oder Bårmann.

N. 10 Eilfter Saz. Aufgabe.

Eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie in die Hälfte zu theilen.

Aufl. und Bew. S. die Uibers. v. L. oder B.

N. 11 Zwölfter Saz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie und aus einem in ihr gegebenen Punkt eine senkrechte Linie zu errichten.

Aufl. und Bew. S. die Uibers. v. L. oder B.

N. 12 Dreizehnter Saz. Aufgabe.

Auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie, von unbestimmter Långe, von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkt eine gerade Linie senkrecht zu ziehen.

Aufl. und Bew. S. die Uibers. v. L. oder B.

N. 13 Vierzehnter Saz. Lehrsaz.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist zweien rechten Winkeln gleich.

Bew. S. die Uibers. v. L. oder B.

N. 14

N. 14 Funfzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei Nebenwinkel gleich sind, so liegen ihre nicht gemeinschäftlichen Schenkel in einer geraden Linie.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

N. 15 Sechzehnter Satz. Lehrsatz.

Scheitelwinkel sind gleich.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

Zusatz.

1) Die Summe der vier Scheitelwinkel ist vier rechten Winkeln gleich.

2) Die Summe aller Winkel, die von einer beliebigen Anzahl der in einerlei Ebene befindlichen, und von dem nemlichen Punkt ausgehenden geraden Linien gebildet werden, ist auch vier rechten Winkeln gleich.

N. 16 Siebzehnter Satz. Lehrsatz.

Der äussere Winkel eines jeden Dreiecks ist grösser als jeder der ihm gegenüberstehenden innern Winkel.

Bew. S. die Uibersetz. v. L. od. B.

N. 17 Achtzehnter Satz. Lehrsatz.

Die Summe jeglicher zwei Winkel eines jeden Dreiecks ist kleiner als zwei rechte.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

Zusatz. Also kann ein Dreieck nur einen einzigen rechten oder stumpfen Winkel haben, und die andern beiden sind spitzige Winkel.

N. 18 Neunzehnter Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreieck steht der größere Winkel der größern Seite gegenüber.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

N. 19 Zwanzigster Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreieck steht die größere Seite dem größern Winkel gegenüber.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

N. 20 Ein und zwanzigster Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreieck ist die Summe von jedem Paar Seiten größer als die dritte Seite.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

N. 21 Zwei und zwanzigster Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke eine Seite gemeinschäftlich haben, die übrigen beiden Seiten des zweiten Dreiecks aber innerhalb des ersten Dreiecks liegen, so ist die Summe dieser beiden Seiten des zweiten Dreiecks kleiner als die Summe derjenigen beiden Seiten des ersten Dreiecks, innerhalb welcher sie liegen, der Winkel aber, welchen sie bilden, ist größer als der Winkel, den die einschliesenden Seiten des ersten Dreiecks bilden.

Bew. S. die Uibers. v. L. od. B.

N. 22 Drei und zwanzigster Satz. Aufgabe. (Fig. 4.)

Aus drei gegebenen geraden Linien, von denen jedes Paar größer ist als die dritte, ein Dreieck zu beschreiben, welches diese drei gegebenen Linien zu Seiten hat.

Auflösung.

Die drei gegebenen geraden Linien seien A, B und C, und zwar A+B größer als C, ferner A+C größer als B, und B+C größer als A. Man ziehe eine gerade Linie DE von unbestimmter Länge, mache DF=A, FG=B und GH=C, lege durch DE und einen beliebigen, aber ausser ihr befindlichen Punkt, (z. B. durch L) eine Ebene, beschreibe in derselben aus dem Punkt G, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser =GH den Kreis HKNL, (1 Satz,) und in der nemlichen Ebene aus dem Punkt F, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser =FD den Kreis MKDL. (1 Satz,) und ziehe aus den beiden Mittelpunkten F und G zu einem Durchschnittspunkt der beiden Kreisumfänge MKDL und HKNL (z. B. zum Durchschnittspunkt K) die beiden geraden Linien FK und GK, so ist die so beschriebene dreiseitige Figur das verlangte Dreieck.

Beweis.

Zuerst ist zu beweisen, daß die beiden Kreisumfänge MKDL und HKNL sich schneiden, d. h. man muß zeigen, daß ein Punkt D des Kreisumfangs MKDL auſ-

serhalb des Kreises HKNL, und ein anderer Punkt M des Kreisumfangs MKDL innerhalb des Kreises HKNL liegt.

Da nemlich A+B grösser als C ist, (nach der Bedingung,) folglich C kleiner als B+A, ferner DF=A, FG=B und GH=C ist, (nach der Construction,) so ist auch GH kleiner als GF+FD, d. i. kleiner als GD. Nun ist GN=GH, (als Halbmesser desnemlichen Kreises HKNL,) also ist auch GN kleiner als GD, folglich liegt der Punkt D des Kreisumfang MKDL ausserhalb des Kreises HKNL.

Befindet sich nun der gegenüberliegende Punkt M dieses Kreisumfang MKDL zwischen den Punkten H und N des Kreisumfangs HKNL, so liegt er innerhalb des Kreises HKNL. Es ist also noch zu beweisen, daß der Punkt M zwischen H und F liegt, und daß er ferner nicht in den Punkt N fallen, oder zwischen den Punkten N und F liegen kann. Denn daraus folgt, daß er zwischen H und N liegt.

Nemlich da B+C grösser als A ist, (nach der Beding.) folglich A kleiner als B+C, ferner FD=A, FG=B und GH=C ist, (nach der Constr.) so ist auch FD kleiner als FG+GH, d. i. FD kleiner als FH, und da FM=FD ist, (als Halbmesser desnemlichen Kreises,) so ist auch FM kleiner als FH, also liegt der Punkt M des Kreisumfangs MKDL zwischen den Punkten F und H. Gesetzt nun, dieser Punkt M liege im Punkt N,

so

so ist FM+NG=FG, folglich auch DF+GH=FG, oder A+C=B: Dieses ist aber gegen die Bedingung, nach der A+C größer als B ist. Gesetzt endlich, dieser Punkt M liege zwischen den Punkten N nnd F, nemlich näher gegen den Mittelpunkt F zu, als der Punkt N des Kreisumfangs HKNL, so ist FG größer als FM+NG, oder FG größer als FD+GH das ist: B größer als A+C, daher A+C kleiner als B, welches gleichfalls der Bedingung A+C größer als B widerspricht. Da also der Punkt M des Kreisumfangs MKDL nicht über H hinaus, (z. B. in E,) nicht im Punkt H oder im Punkt N des Kreisumfangs HKNL, und endlich nicht über den Punkt N hinaus nach F zu liegt, so liegt er zwischen den Punkten H und N des Kreisumfangs HKNL, daher innerhalb des Kreises HKNL, und da zugleich ein anderer Punkt D dieses Kreisumfangs MKDL ausserhalb des Kreises HKNL liegt, (nach dem vorhin Erwiesenen,) so schneidet der Kreis MKDL den andern HKNL wenigstens in zwei Punkten, z. B. in K und L.

Wenn man hierauf zu einem dieser Durchschnittspunkte, (z. B. zum Punkt K,) die geraden Linien FK und GK zieht, so entsteht eine geradlinige ebene Figur, deren drei Seiten FG, FK und GK sind. Da nun FK=FD, (als Halbmesser desnemlichen Kreises,) aber FD= der gegebenen Linie A ist, (nach der Constr.) so ist auch GK=C. (1 Grundś.) Endlich ist FG=B, (nach der Constr.) folglich sind die Seiten des beschriebenen Drei-

ecks FKG den drei gegebenen geraden Linien A, B und C einzeln genommen, gleich.

N. 23 Vier und zwanzigster Satz.

Aufgabe.

An einen gegebenen Punkt einer der Lage nach gegebenen geraden Linie einen geradlinigen Winkel zu setzen, der einem gegebenen gleich ist.

Aufl. u. Bew. Siehe die Uibers. von L. und B.

N. 24 Fünf und zwanzigster Satz. Lehrsatz. (Fig. 5 und 6.)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen Dreiecks zweien Seiten des andern Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind, der von den erwähnten Seiten gebildete Winkel aber in dem einen Dreieck größer ist als in dem andern, so ist auch die diesem Winkel gegenüberstehende Seite des einen Dreiecks größer als die des andern.

Beweis.

Die beiden gegebenen Dreiecke seien BAC und EDF, und der Winkel BAC sei größer als der Winkel EDF. Man setze an den Punkt D der DE den Winkel EDG=BAC, (24 S.) mache DG=AC oder =DF, und ziehe FG und EG, so ist das Dreieck EDG mit dem Dreieck BAC congruent, (5 S.) also EG=BC.

Erster Fall. (Fig 5. b.) EF liege unterhalb EG.

Da das Dreieck FDG gleichschenklich ist, so sind die

Win-

Winkel DFG und DGF an der Grundlinie gleich, (6 S.) also ist DFG größer als EGF, und daher auch EFG größer als EGF. (9 Grundſ.) Folglich ist im Dreieck EFG die Seite EG größer als EF, und da EG=BC, (nach dem Erwiesenen,) so ist auch BC größer als EF.

Zweiter Fall. (Fig. 6.) EF liege oberhalb dem EG. Es ist DG+GE größer als DF+FE, (22 S.) und da DG=DF, (nach der Constr.) so ist DG+GE−DG größer DF+FE−DF, (5 Grundſ.) d. i. GE ist größer als FE. Folglich, da GE=BC, (nach dem Erwiesenen,) so ist auch BC größer als FE.

Dritter Fall. (Fig. 5. a.) EF liege in EG, also auch der Punkt F in EG. Nun ist EDG=BAC, (nach der Construct.) aber BAC größer als EDF, (nach der Beding.) also auch EDG größer als EDF. Folglich liegt DF zwischen DE und DG, und daher der Punkt F zwischen E und G. Also ist EG größer als EF, und da EG=BC, (nach d. Erwies.) so ist auch BC größer als EF.

Bemerkung.

Der Beweis, welchen Euklid giebt, setzt voraus, daß EF unterhalb der EG liegen müße, ist also mangelhaft. Die Verbesserung, welche Lorenz damit vorgenommen, indem er DE als die kleinere Seite, und DF als die größere Seite annimmt, setzt demohngeachtet den zweiten Satz des dritten Buchs der Elemente schon als bewiesen voraus. Denn wenn mit DG=DF ein Kreis beschrieben wird, so liegt, da DE kleiner als DF oder als DG ist,

ist, der Punkt E noch innerhalb des Kreises, und GE wird, über E verlängert, den Kreis schneiden, oder diese so verlängerte GE wird eine Sehne dieses Kreises seyn. Alsdann ist eigentlich zu beweisen, daß die gerade Linie, welche zwei Punkte des Kreisumfangs verbindet, d. h. die Sehne, innerhalb des Kreises fällt.

Nur Bärmann hat in seiner latein. Uibersetzung, nach Anleitung des Campanus den vollständigen, für die drei Fälle eben ausgeführten Beweis gegeben.

N. 25 Sechs und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, zweien Seiten des andern Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind, die dritte Seite des einen Dreiecks aber größer ist, als die dritte Seite des andern, so ist auch der Winkel des einen Dreiecks, welcher dieser dritten Seite gegenübersteht, größer als der entsprechende Winkel des andern Dreiecks.

Bew. Siehe die Uibers. von Lorenz oder Bärmann.

N. 26 Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 7 und 8.)

Zwey Dreiecke, in denen zwei Winkel nebst einer Seite des einen Dreiecks, zweien Winkeln nebst einer Seite des andern Dreiecks gleich sind, sind congruent.

Bew. Siehe die Uibers. von Lorenz oder Bärmann.

N. 27 Acht und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 9.)

Zwei gerade Linien, AB und CD, die in einerlei Ebene so liegen, daß wenn sie von einer dritten geraden Linie

EF

EF geschnitten werden, die Wechselswinkel x und y gleich sind, sind Parallelen.

Beweis.

Gesetzt, AB und CD seien keine Parallelen, so liegen, wenn sie hinlänglich vor- und rückwärts verlängert werden, nicht alle Punkte der einen ausserhalb der andern, (35 Erkl.) also haben sie einen Punkt gemeinschäftlich, (12 Grundſ.) und es entsteht entweder das Dreieck IKG oder das Dreick IKH. Im ersten aber ist x grösser y, und und im zweiten ist y grösser als x, (16 Satz,) welches beides gegen die Bedingung dieses Lehrsatzes ist.

N. 28 Neun und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Zwei in einerlei Ebene so liegende gerade Linien, daß wenn sie von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, der äussere Winkel dem an derselben Seite der schneidenden Linie gegenüber stehenden innern Winkel gleich ist, oder die Summe der beiden an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden innern Winkel zweien rechten gleich ist, sind Parallelen.

Bew. Siehe die Uibers. v. L. oder B.

Zusatz. (Fig. 10.)

Wenn zwei gerade, in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD auf einer geraden Linie AC senkrecht stehen, so ist die Summe der beiden innern, an einerlei Seite der AC liegenden Winkel, nemlich $BAC + DCA = 2R$, also sind AB und CD parallel, und bei diesem Parallelsein kommt es nicht auf die Grösse der AC, mit der AB und CD rechte Winkel bilden, an.

Dreißig-

Dreißigster Satz. Lehrsatz. (Fig. 14.)

Wenn auf einer geraden Linie AB, in einerlei Ebene, und an dernemlichen Seite der AB, zwei gleiche gerade Linien AC und BD senkrecht stehen, deren Endpunkte C und D mit der geraden Linie CD verbunden sind, so sind die beiden Winkel ACD und BDC auch gleich.

Beweis.

Man halbiere AB und errichte aus dem Halbirungspunkt F die FG senkrecht auf AB, so wird die CD von der FG zwischen den Endpunkten C und D geschnitten, (weil bei A, F und B rechte Winkel, und daher FG mit AC und BD parallel ist,) dieser Durchschnittspunkt sei G. Man ziehe AG und BG, so sind die beiden Dreiecke AFG und BFG congruent. (5 Satz.) Denn es ist BF=AF (nach der Construction,) der W. BFG= dem W. AFG, (als rechte W.) und FG sich selbst gleich. Also ist BG=AG, und der W. FBG= dem W. FAG. Da nun DBF=R, und CAF=R, so ist DBF=CAF, folglich auch DBF−FBG=CAF−FAG, d. i. DBG=CAG, und da nun überdieß BG=AG, (nach dem Erwiesenen,) und BD=AC, (nach der Bedingung,) so sind auch die beiden Dreiecke BGD und AGC congruent. Daher ist der Winkel BDG dem Winkel ACG gleich, das ist; BDC=ACD.

Zusatz.

Ist also ACD ein rechter Winkel, so ist auch BDC ein rechter Winkel, ist aber ACD ein spitziger Winkel, so auch BDC ein spitziger Winkel, ist endlich ACD ein stumpfer Winkel, so ist auch BDC ein stumpfer Winkel.

Ein und dreißigster Satz. Lehrsatz.
(Fig. 14.)

Wenn auf einer geraden Linie AB zwei gerade Linien, AC und BD in einerlei Ebene und an dernemlichen Seite der AB senkrecht stehen, und ihre Endpunkte C und D mit einer geraden Linie CD so verbunden sind, daß der Winkel BDC dem Winkel ACD gleich ist, so sind auch die senkrechten Linien AC und BD gleich.

Beweis.

Es wird, wie in dem Beweis des vorigen Satzes gezeigt, das die beiden Dreiecke AFG und BFG congruent sind, auch BG=AG, und der W. DBG= dem W. CAG ist. Da nun überdieß der Winkel BDC= dem Winkel ACD ist, (nach der Bedingung) so sind die beiden Dreiecke BGD und AGC congruent, (27 Satz,) und daher BD=AC.

Zusatz.

Wenn (Fig. 12) bei B und Q zwar rechte Winkel, aber die senkrechte QP größer als die senkrechte BD ist, so sind die Winkel BDP und QPD ungleich, und QPD ist kleiner als BDP. Denn wenn man QS=BD macht, und DS zieht, so sind die Winkel x und y gleich. (30 Satz.) Aber der W. x ist als äuserer Winkel des Dreiecks PSD größer als der gegenüberstehende innere W. SPD, (17 Satz,) also ist auch der W. y größer als der W. SPD, folglich um so mehr der Winkel BDP größer als der Winkel SPD, oder als QPD. Also ist QPD kleiner als BDP. Endlich wenn zwar bei B und Q rechte Winkel sind, (Fig. 12) aber der Winkel QPD kleiner als der Winkel BDP ist, so ist die

senk-

senkrechte QP größer als die senkrechte BD. Denn gesetzt: QB sei =BD, so QPD=BDP, (30 Satz,) gegen die Bedingung. Ist aber QP kleiner als BD, d. h. BD größer als QP, so ist der Winkel BDP kleiner als der Winkel QPD, d. h. der Winkel QPD größer als der Winkel BDP, welches gleichfalls gegen die Bedingung ist.

Zwei und dreißigster Satz. Lehrsatz.
(Fig. 13.)

Wenn auf einer geraden Linie AB in einerlei und Ebene an der nemlichen Seite der AB zwei gerade Linien AE und BD senkrecht stehen, und aus einem Punkt D der einen auf die andere AE eine gerade Linie DC senkrecht gezogen ist, so daß also ACD ein rechter Winkel ist, so ist der andere Winkel BDC auch ein rechter.

Beweis.

Gesetzt, es sei BDC ein schiefer Winkel, so ist, die DC mit der AB entweder parallel, oder nicht parallel. Ist 1) DC mit AB nicht parallel, so ist, da bei A und C rechte Winkel sind, (nach der Bedingung,) und daher CD mit AB parallel ist, (29 Satz, Zusatz,) auch CD und DC in einander liegen, dienemliche gerade Linie mit der AB zugleich parallel und auch nicht parallel, welches widersprechend ist. Daher ist BDC kein schiefer Winkel.

Ist aber 2) die DC mit der AB parallel, und man setzt BDC sei ein spitziger Winkel, so folgt gleichfalls etwas Widersprechendes. Man halbire nemlich die AB, und errichte auf ihr aus dem Halbirungspunkt I die IK senkrecht, so ist IK mit AC und BD parallel, (29 Satz, Zusatz,) also

liegt

liegt sie zwischen AC und BD, und die CD wird von ihr in einem Punkt K geschnitten, der zwischen ihren Endpunkten C und D liegt. Ferner mache man AM=BD, so liegt der Punkt M nicht zwischen A und C, denn da der spitzige Winkel BDC kleiner als der rechte ACD ist, so ist BD grösser als AC (31 Satz, Zusatz,) folglich, da AM=BD ist, (nach der Construction,) ist auch AM grösser als AC. Endlich ziehe man KM. Nun ist das Viereck AIKM congruent mit dem Viereck BIKD, (denn es ist AM=BD, der rechte W. MAI= dem rechten W. DBI, die Seite AI= der Seite BI, (nach d. Construction,) die Winkel am Punkt I, als rechte, gleich, und endlich IK sich selbst gleich, daher decken sich die beiden Vierecke,) folglich ist der W. AMK= dem W. BDK, also auch MK mit AB parallel. Man verlängere die MK beliebig, und ziehe aus irgend einem Punkt dieser Verlängerung, (z. B. aus dem Punkt N,) eine gerade Linie NP senkrecht auf AM, so liegt der P. P, in welchem sie auf die AM trift, zwischen den Punkten A und C. Denn läge er im Punkt C, so würde der Punkt N in der DC liegen, und da der Punkt N zugleich in der verlängerten MK liegt, und der Punkt K auch in der DC liegt, so würde die MN in der CD liegen, folglich auch der Punkt M, welches der Construction widerspricht. Läge der Punkt P ferner zwischen C und M, so würde die CD von der NP geschnitten, und ein Dreieck entstehen, welches zwei rechte Winkel, nemlich bei C und P hat, welches unmöglich ist. (18 Satz, Zusatz.) Läge endlich der Punkt P im Punkt A, so würde die PN in die AB fallen, also der P. N in AB oder ihrer Verlängerung liegen, folglich die MN mit der AB oder ihrer Verlängerung einen Punkt N gemeinschäftlich haben, und daher mit ihr nicht parallel sein, welches gegen

das

das Erwiesene ist. Also liegt der Punkt P auf der AC zwischen den Punkten A und C. Endlich mache man AR=PN, AQ=PM, und ziehe QR, so ist das Dreieck AQR congruent mit dem Dreieck PMN, (5 Satz,) also der Winkel AQR= dem Winkel PMN oder AMK, also stellt die Lage der QR die Lage der MN vor, wenn sie vom Punkt M, an der MA, mit ungeändertem Winkel AMK nach der AB zu gerückt, und im Punkt Q eingetroffen ist, und hier hat MN, oder die verlängerte MK nun den Punkt R mit der AB gemeinschäftlich, folglich ist sie nicht mehr mit der AB parallel. Macht man nun QS=MK, QF=MC, und zieht FS, so ist das Dreieck FQS congrnent mit dem Dreieck CMK, (5 Satz,) also ist der Winkel QFS= dem W. MCK, d. h. QFS ist ein rechter Winkel, und daher, (da bei A auch ein rechter Winkel ist,) FS mit AB parallel. Es stellt aber die Lage der FS die Lage der CK vor, wenn solche mit ungeändertem rechten Winkel ACK, vom Punkt C, an der CA nach der AB zu gerückt, und im Punkt F eingetroffen wäre, und daher ist die CK auch in diesem Fall noch mit der AB parallel, die im Punkt Q aber eingetroffene MK ist nicht mehr mit dieser AB parallel. Das heißt: die MK hat am Punkt M eine solche parallele Lage gegen die AB, daß sie sich bei der Abnahme des Abstandes AM ändert, und in eine schneidende, also nicht parallele Lage gegen diese AB übergeht, obgleich der Winkel AMK ungeändert bleibt, die CK hingegen hat an allen Punkten der MA, bei ungeändertem rechten Winkel ACK, überhaupt eine parallele Lage gegen die AB, und daher hat diese CK am Punkt C eine solche parallele Lage gegen die AB, die bei der Abnahme des Abstandes AC nicht in eine schneidende Lage gegen diese AB übergeht, nnd die also

von

von der parallelen Lage, welche die MK am Punkt M gegen die AB hat, wesentlich verschieden ist. Das heißt: die MK ist nicht auf die nemliche Art mit der AB parallel, wie die CK. Nun ist aber die DK nebst ihrer Verlängerung auf die **nemliche** Art mit der AB parallel, wie die MK, weil ABD=BAC=R, auch BD=AM, und der W. BDK= dem W. AMK ist, folglich auch, wenn die DK an der DB mit ungeändertem Winkel BDK der AB so nahe gerückt wird, daß ihr Abstand von der AB der senkrechten AQ gleich ist, die AB von der verlängerten DK unter einem Winkel geschnitten wird, welcher dem Winkel ARQ, der bei dem Durchschnitt der QR mit der AB gebildet wird, gleich ist, weil ein mit dem Dreieck QAR congruentes Dreieck entsteht. Da nun die MK nebst ihrer Verlängerung nicht auf die nemliche Art mit der AB parallel ist wie die CK nebst ihrer Verlängerung, so ist auch die DK nebst ihrer Verlängerung nicht auf die nemliche Art mit dieser AB parallel, wie die CK nebst ihrer Verlängerung. Da aber nach der Voraussetzung, DC und CD in einander fallen, so liegt auch die DK nebst ihrer Verlängerung in der CK und deren Verlängerung, und daher haben beide einerlei Lage gegen die AB, folglich auch einerlei parallele Lage gegen diese AB, oder beide, nemlich die DK nebst ihrer Verlängerung und die CK nebst ihrer Verlängeruug sind auf die **nemliche** Art mit der AB parallel. Dieses widerspricht aber dem eben Erwiesenen, daß die DK **nicht** auf die **nemliche** Art mit der AB parallel ist, wie die CK. Also führt die Voraussetzung, daß der W. BDC spitzig ist, auf einen Widerspruch, folglich ist sie unrichtig, und BDC kein spitziger Winkel.

Setzt man hierauf: BDC sei ein stumpfer Winkel, so zeigt ein ähnlich geführter Beweis, daß auch diese Voraussetzung auf einen Widerspruch führt, und daher unrichtig, folglich BDC auch kein stumpfer Winkel ist.

Da nun BDC weder spitzig noch stumpf ist, so ist er kein schiefer Winkel, folglich ist er ein rechter Winkel.

Anmerkung. Einen andern Beweis dieses Satzes, vermittelst der Exhaustions-Methode, indirect geführt, findet man in der ausführlichen evidenten Theorie der Parallellinien, Nürnberg, bei Lechner, 1819, Seite 72, und direct geführt, in der auserlesenen mathematischen Bibliotheck, Nürnberg, bei Lechner, 1820, in der Vorrede.

Drei und dreißigster Satz. Lehrsatz.

(Fig. 14.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABD ist die Summe der drei Winkel B, y und z zweien rechten Winkeln gleich.

Beweis.

Man errichte aus dem Endpunkt A auf der Kathete AB, in einerlei Ebene mit BD, und an der nemlichen Seite der AB, die AE senkrecht, und ziehe auf sie, aus dem Endpunkt D der andern Kathete BD die DC senkrecht, so ist der Winkel BDC ein rechter, (32 Satz,) also = dem Winkel ACD. Folglich ist BD=AC. (31 Satz.) Ferner, da BAC und ACD rechte Winkel, auch ABD und CDB (als rechte Winkel,) gleich sind, so ist ferner CD=AB. (31 Satz.) Da nun AD gemeinschäftlich ist, so sind die bei-

beiden Dreiecke ABD und ACD congruent, (9 Satz,) daher ist der W. y = dem W. x, also y + z = x + z. (2 Grunds.) Nun ist x + z = BDC = einem rechten Winkel, daher ist auch y + z einem rechten Winkel gleich, (1 Grunds.) und da ABD auch ein rechter Winkel ist, (nach der Bedingung,) so ist ABD + y + z = 2R, (2 Grunds.) das heißt: die Summe der drei Winkel des bei B rechtwinklichen Dreiecks DBA ist zweien rechten Winkeln gleich.

Vier und dreißigster Satz. Lehrsatz.

(Fig. 15.)

In jedem schiefwinklichen Dreieck ACB ist die Summe der drei Winkel zweien rechten gleich.

Beweis.

Das schiefwinkliche Dreieck ACB ist entweder spitzwinklich oder stumpfwinklich. Ist es ein spitzwinkliches Dreieck, so ziehe man aus einem beliebigen Winkelpunkt, z. B. aus C die CD senkrecht auf die ihm gegenüberstehende Seite AB. Ist es aber stumpfwinklich, so ziehe man aus der Spitze C des stumpfen Winkels ACB, die CD senkrecht auf die ihm gegenüberstehende Seite AB. In beiden Fällen liegt die senkrechte CD zwischen den Seiten AC und BC.. Denn in einem spitzwinklichen Dreieck sind drei spitzige, und in einem stumpfwinklichen sind zwei spitzige Winkel. (18 S.) Ist nun ACB ein stumpfer Winkel, so sind y und n spitzige Winkel, also liegt die senkrechte CD vor dem spitzigen Winkel y, und auch vor dem spitzigen W. n. (18 S.) In dem bei D rechtwinkl. Dreieck ADC aber, ist die Summe der spitzigen W. y und z = R, und eben so, in dem bei D rechtwinklichen Dreieck BDC die Sum-

Summe $m+n=R$. (33 Satz.) Also ist $y+z+m+n=2R$, (2 Grunds.) da nun $z+m=ACB$, und y und n die beiden übrigen Winkel des schiefwinklichen Dreiecks ACB sind, so ist die Summe der drei Winkel dieses Dreiecks zweien rechten Winkeln gleich.

Zusatz.

Also ist in jedem Dreieck die Summe der Winkel zweien rechten gleich, d. i. $A+B+C=2R$. Da aber $C+r$ auch $2R$, (14 S.) so ist $A+B+C=r+C$. Also $A+B=r$, (1 und 3 Grunds.) nemlich: der äussere W. BCE ist der Summe der beiden gegenüberstehenden innern W. des Dreiecks gleich.

Fünf und dreißigster Satz. Aufgabe.

Wenn zwei gleichartige Größen A und C, (z. B. zwei gerade Linien, oder zwei geradlinige Winkel,) gegeben sind, von denen aber C kleiner als A ist, ein solches Vielfaches der Größe C zu finden, welches größer als die gegebene Größe A ist.

Auflösung.

Man trage die Größe C auf die Größe A so vielmal als es angeht, und bemerke wie vielmal C in A enthalten ist, z. B. m mal, oder mit andern Worten: man messe A mit C. Hierauf nehme man ein solches Vielfaches von C, das um C größer ist, als das Vielfache m von C, d. h. man nehme C $(m+1)$ mal, so ist $(m+1)$ C größer als A.

Beweis.

Da die Größen A und C nicht nur gleichartig, sondern auch gegeben, d. h. von bestimmter Größe oder begrenzt sind, so ist C in A nach einer bestimmten ganzen

Zahl

Zahl m, d. h. m mal entweder ganz genau enthalten, (d. h. A ist ein Vielfaches von C, nemlich $A=mC$,) oder C ist mehrere mal und noch ein Theil n von C in A enthalten, d. h. es ist $A=mC+nC$. Nun ist offenbar $mC+C$ größer als mC oder als A. Da aber das ganze C größer ist als ein Theil desselben, (9 Grds.) so ist das m fache von C nebst C, d. h. $mC+C$ auch größer als $mC+nC$, und wenn also $mC+nC=A$, so ist wiederum $mC+C$ oder $(m+1)C$ größer als A.

Sechs und dreißigster Satz. Lehrsatz.

(Fig. 16.)

Wenn zwei ungleiche gleichartige Größen AB und C gegeben sind, und von der größern AB die Hälfte BQ, von dem Rest AQ wiederum die Hälfte QR, von dem Rest AR wiederum die Hälfte RS u. s. f. weggenommen wird, so wird endlich eine Größe z. B. AS übrig bleiben, welche kleiner als die gegebene Größe C ist.

Beweis.

Man mache von der gegebenen kleinern Größe C ein solches Vielfaches ED, das größer als AB ist, (35 Satz,) so ist $EF=FG=GH=HD=C$. Man nehme hierauf die Hälfte BQ von AB weg, von dem Rest AQ, (der $=BQ=\frac{1}{2}AB$ ist,) wiederum die Hälfte QR, von dem Rest $AR=QR=\frac{1}{4}AB$ wiederum die Hälfte RS, und wiederhole dieses Wegnehmen und Halbiren so vielmal, bis die Anzahl der Theile BQ, QR, RS und SA der Anzahl der Theile EF, FG, GH und HD gleich ist. Nun ist AB kleiner als DE, also $\frac{1}{2}$ AB oder AQ kleiner als $\frac{1}{2}$ DE. Es ist

aber DF entweder $=\frac{1}{2}$DE, oder größer als $\frac{1}{2}$DE, (nach d. Constr.) ist nun DF$=\frac{1}{2}$DE, so ist DF$=$FE$=$C, und da AQ kleiner als $\frac{1}{2}$DE war, so ist auch AQ kleiner als DF, d. i. AQ kleiner als C. Welches zu erweisen. Ist hingegen DF größer als $\frac{1}{2}$DE, so ist AQ um so mehr kleiner als DF, weil es schon kleiner als $\frac{1}{2}$DE war. Folglich ist $\frac{1}{2}$AQ kleiner als $\frac{1}{2}$DF, oder AR kleiner als $\frac{1}{2}$DF. Es ist aber DG entweder $=\frac{1}{2}$DF, oder größer als $\frac{1}{2}$DF, (nach der Constr.) also ist AR kleiner als DG, und im ersten Fall, (wenn nemlich DG$=\frac{1}{2}$DF, d. i. DG$=$GF ist,) auch kleiner als C, (weil GF$=$C,) im zweiten Fall, (wenn nemlich DG gr. als $\frac{1}{2}$DF,) ist $\frac{1}{2}$AR kleiner als $\frac{1}{2}$DG, d. i. AS kl. als $\frac{1}{2}$DG. Es ist aber DH$=$HG, also DH$=\frac{1}{2}$DG, folglich ist AS kleiner als DH. Nun ist DH$=$C, daher ist AS kleiner als C.

Sieben und dreißigster Satz. Lehrsatz.

(Fig. 17.)

Zwei der Lage und Größe nach gegebene gerade Linien BD und AF, von denen alle Punkte der einen ausserhalb der andern sind, und die in einerlei Ebene so liegen, daß wenn sie von einer geraden Linie AB geschnitten werden, die Summe der beiden innern an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel kleiner als zwei rechte ist, sind nicht parallel.

Beweis.

Es sei ABD$+$BAF kleiner als zwei rechte Winkel. Man nehme auf BD irgend einen Punkt M, und ziehe AM. Nun liegt AF entweder ausserhalb AM, oder inner-

halb AM, nemlich zwischen AB und AM. Liegt nun AF zwischen AB und AM, so wird AD, da sie von der AM geschnitten wird, auch von der über F verlängerten AF geschnitten, also hat AF mit AD einen Punkt gemeinschäftlich, folglich ist AF mit AD nicht parallel, (35 Erkl. und 12 Grundſ.) und daher ist für diesen Fall der Satz erwiesen. Liegt aber AF ausserhalb der AM, so setze man an AM im Punkt A einen Winkel CAM der dem W. AMB gleich ist, (24 Satz.) Nun ist im Dreieck ABM die Summe der drei W. ABM+BAM+AMB=2R, (34 Satz, Zusatz,) es ist aber CAM=AMB, (nach der Constr.) also ist ABM+BAM+CAM=ABM+BAM+AMB, (2 Grundſ.) folglich ABM+BAM+CAM=2R. (1 Grundsatz.) Da aber BAM+CAM=BAC, so ist auch ABM+BAC das ist: ABD+BAC=2R. Hingegen ist ABD+BAF kleiner als 2R, (nach der Beding.) folglich ist auch BAF kleiner als BAC, (5 Grundſ.) daher liegt AF zwischen AB und AC. Man mache also MN=MA, und ziehe AN, so liegt AF entweder zwischen AM und AN, oder zwischen AN und AC. Im ersten Fall ist der Satz wie vorhin erwiesen. Im zweiten Fall, da der äussre W. AMB des Dreiecks AMN=MNA+MAN ist, (34 Satz, Zusatz,) und in dem gleichschenkl. Dreieck AMN die W. MNA und MAN gleich sind, (6 Satz,) ist AMB=2MAN, also, da CAM=AMB, (n. d. Constr.) auch CAM=2MAN, (1 Grundſ.) folglich MAN=½CAM, (7 Grundſ.) und daher CAM−MAN oder CAN auch =½CAM. Hierauf mache man NP=NA, und ziehe AP, so liegt AF entweder zwischen AN und AP, wie in der 17 Fig.) und dann ist der Satz erwiesen, oder zwischen AP und AC. In dem letztern Fall wird wie vorhin bewiesen, daß der W.

NAP=½CAN, d. h. =¼CAM ist. Denn im gleichschenkl. Dreieck NPA ist 2NAP= dem äussern W. ANB. Aber ANB oder ANM war =MAN, und MAN=½CAM, also ist ANM=½CAM. Ferner war ½CAM=CAN folglich ist ANM=CAN. Nun ist der äussere Winkel ANM= 2NAP, daher CAN=2NAP und ½CAN=NAP, so wie CAP auch =½CAN, d. i. =¼CAM. Wenn man nun so fortfährt, so kommt man endlich auf einen Winkel x, der kleiner ist, als der gegebene Winkel α, oder CAF, den nemlich die AF mit der AC macht, so klein dieser auch sein mag. Denn vermittelst dieses Verfahrens nimmt man von dem W. CAM die Hälfte MAN weg, von dem Rest CAN nimmt man wiederum die Hälfte NAP weg, von dem Rest CAP wiederum die Hälfte und so ferner. Also wird endlich ein Winkel x übrig bleiben, der kleiner ist, als der gegebene Winkel α, (36 Satz) das heißt, man wird endlich eine Linie ziehen, deren einer Endpunkt in A der andere in der hinlänglich verlängerten BD liegt, (z. B. die Linie AP) die der AC näher ist als die AF, oder zwischen AC und AF fällt, so daß ein Dreieck, (z. B. ABP) entsteht, zwischen dessen Seiten AB und AP die gerade Linie AF liegt, und dessen dritte Seite (z. B. BP)) also von der hinlänglich verlängerten AF geschnitten werden muß, folglich die verlängerte AF mit der verlängerten AD einen Punkt (z. B. P) gemeinschäftlich hat, und daher mit ihr nicht parallel ist, welches nemlich zu erweisen war.

N. 29 Acht und dreißigster Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien AB und CD parallel sind, und von einer geraden Linie EF irgendwo beliebig geschnitten

ten werden, so sind 1) die Wechselswinkel (t und y oder x und u) gleich, 2) ist der äussere Winkel dem innern ihm gegeüberliegenden und an der nemlichen Seite der schneidenden Linie EF befindlichen Winkel gleich, (nemlich z=y oder r=u, und 3) die Summe der beiden innern an einerlei Seite der schneidenden Linie EF liegenden Winkel, (nemlich t+u oder x+y) zweien rechten Winkeln gleich.

Beweis.

1) Gesetzt die Wechselswinkel t und y seien ungleich, so ist einer kleiner als der andere. Es sei nun y kleiner als t, so ist y+x kleiner als t+x, (4 Grundsf.) nun ist t+x=2R, (14 Satz) also ist y+x kleiner als 2R. Daher sind AB und CD nicht parallel. (37 Satz.) Dieses ist aber gegen die Annahme. Folglich sind t und y nicht uugleich, das heißt: sie sind gleich. Eben so: wenn die Wechselw. x und u ungleich sind, so sei x kleiner als u also ist x+y kleiner als u+y, (4 Grundsf.) nun ist u+y=2R, (14 Satz) also ist x+y kleiner als 2R. Daher sind wiederum AB und CD nicht parallel: welches der Annahme widerspricht.

2) Da t=y, (uach dem Erwiesenen) und t=z, als Scheitelwinkel, (16 Satz.) so ist z=y, (1 Grundsf.) oder der äussere Winkel z dem gegenüberstehenden y gleich. Ferner, da x=u, und x=r, (16 Satz.) so ist r=u (1 Grundsf.)

3) Da t=y, so ist t+u=y+u, (2 Grundsf.) aber y+u =2R, (14 Satz.) also auch t+u=2R. (1 Grundsf.)

Eben

Eben so! Da $x=u$, so ist $x+y=u+y$ (2 Grundſ.) aber $u+y=2R$, (14 Satz,) alſo auch $x+y=2R$.

N. 30 Neun und dreißigſter Satz

Lehrſatz.

Zwei gerade Linien die mit einer dritten geraden Linie parallel ſind, ſind auch miteinander parallel.

Beweis. Siehe die Uiberſ. von Lor. und B.

N. 31 Vierzigſter Satz. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

Aufl. und Bew. Siehe die Uiberſ. von L. od. B.

N. 33 Ein und vierzigſter Satz.

Lehrſatz.

Die beiden geraden Linien, welche je zwei der nach einerlei Gegend liegenden Endpunkte zweier gegebenen gleichen Parallelen verbinden, ſind auch gleiche Parallelen.

Bew. Siehe die Uiberſetz. von Lor. od. B.

Schlußbemerkung.

Die noch übrigen funfzehn Sätze des erſten Buchs der Elemente können nun nach ihrer Folge im Original ſelbſt, oder in deſſen Uiberſetzungen von Lorenz oder Bärmann, durchgegangen werden. Nur erinnere ich, in Beziehung auf den 47 Satz der Elemente Euklid's, daß die Conſtruction

für den Beweis des sogenannten pythagoräischen Lehrsatzes, welche Euklid giebt, auf verschiedene Arten, in Absicht auf die Lage der drei auf den Seiten des rechtwinklichen Dreiecks beschriebenen Quadrate, geändert werden kann. Zu einem Beispiel mag die in meiner systematischen Zusammenstellung der Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes, (Nürnberg, bei Lechner, 1819,) und zwar Seite 35 vorgetragene Beweisart, welche Clavius zuerst gegeben hat, dienen, nur will ich solche hier so darstellen, daß auch das Quadrat der Hypotenuse frei beschrieben wird, welches eben das Characteristische der Euklidischen Construction ist, dagegen Clavius erst beweisen muß, daß das auf der Hypotenuse beschriebene Viereck ein Quadrat ist.

Es sey also das bei A rechtwinkliche Dreieck ABC das gegebene Dreieck, (Fig. 10 in der eben genannten Schrift,) man beschreibe auf dessen Katheten AB und AC die Quadrate ABDE und ACFG, und auf der Hypotenuse das Quadrat BCIH. Man verbinde den Winkelpunkt F des größern Kathetenquadrats und den Winkelpunkt I des Hypotenusenquadrats mit einer geraden Linie FI, so ist das Dreieck CFI mit dem gegebenen Dreieck ABC congruent, (denn es ist CI=CB, als Seiten eines Quadrats, CF=AC, als Seiten des größern Kathetenquadrats, und da W. ACF= W. BCI=R, so ist auch ACF—ACI=BCI—ACI, d. i. FCI=BCA,) folglich CFI=BAC =R; und da der Winkel am Punkt F des Kathetenquadrats auch =R ist, so liegt die Verbindungslinie FI in der Seite FG dieses Kathetenquadrats, und zwar zwischen F und G, weil FI=AB oder der Seite des kleinern Kathetenquadrats gleich ist. Ferner verbinde man die Winkelpunkte D und H des kleinen Katheten- und Hypotenusenquadrats

mit

mit einer geraden Linie DH, so kann man, wie vorhin, zeigen, daß das so entstandene Dreieck BDH mit dem gegebenen Dreieck ABC congruent ist, weil BD=AB, BH=BC und DBH=CBA. Also ist der W. BDH=BAC =R, und da der Winkel des kleinern Kathetenquadrats am Punkt D auch ein rechter ist, so hat die Verbindungslinie DH, oder die Seite DH des Dreiecks BDH die Lage der Seite DE des kleinern Kathetenquadrates, und zwar liegt der Punkt H in der Verlängerung der DE, weil DH=AC, also größer als AB oder DE ist. Hierauf ziehe man AI und AH, und endlich durch A die KL parallel mit BH. Nun ist das Dreieck AIC die Hälfte des Quadrats ACFG, und auch die Hälfte des Rechtecks CIKL, (mit dem es die Grundlinie CI gemeinschäftlich hat,) folglich ist CIKL= Q. ACFG. Ferner ist das Dreieck BAH die Hälfte des Quadrats ABDE, und auch die Hälfte des Rechtecks BHKL, (auf dessen Grundlinie BH es steht,) folglich ist BHKL= Q. ABDE. Aber es ist Rechteck CIKL+ Rechteck BHKL= Q. BCIH. Daher ist auch Q. ACFG+ Q. ABDE= Q. BCIH. W. Z. E.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, daß die Erfindung der funfzehnten Beweisart, (Seite 62—64 in meiner vorhin genannten Schrift: system. Zusammenstellung ꝛc.) die mir vor neun Jahren von den Herrn Professoren Heller, (meinem damaligen Collegen am Nürnberger Gymnasium,) und Pfaff, (beide gegenwärtig zu Erlangen,) mündlich mitgetheilt wurde, dem Herrn Hofrath Joh. Tobias Mayer, Professor der Physik zu Göttingen, gehört, der auf solche schon im Jahr 1772 gekommen ist, und sie in seinen, in den Jahren 1780—1785 zu Altdorf gehaltenen Vorlesungen öfters öffentlich vorgetragen hat.

An-

Anhang

zu dem vierten Buch der Elemente, die geometrische Construction eines regelmäßigen Siebzehnecks enthaltend.

Lehnsatz.

Die Sehne des dreizehnfachen Bogens des vier und dreißigsten Theils des Kreisumfangs ist dem Unterschied zwischen der Summe des achten Theils von α, β, und δ und dem achten Theil von r gleich, d. h. $2\sin\frac{13}{68}p$ oder $2\cos\frac{1}{17}p = \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{8}\beta + \frac{1}{8}\delta - \frac{1}{8}r$, wenn r den Kreishalbmesser, p den Kreisumfang, α die Seite eines Quadrats, das einem Rechteck aus r und $17r$ gleich, β die Seite eines Quadrats, das einem Rechteck aus $34r - 2\alpha$ und r gleich, und endlich δ die Seite eines Quadrats, das einem Rechteck aus $6r + 2\alpha$ und $2\alpha - \beta$ gleich ist, bedeutet.

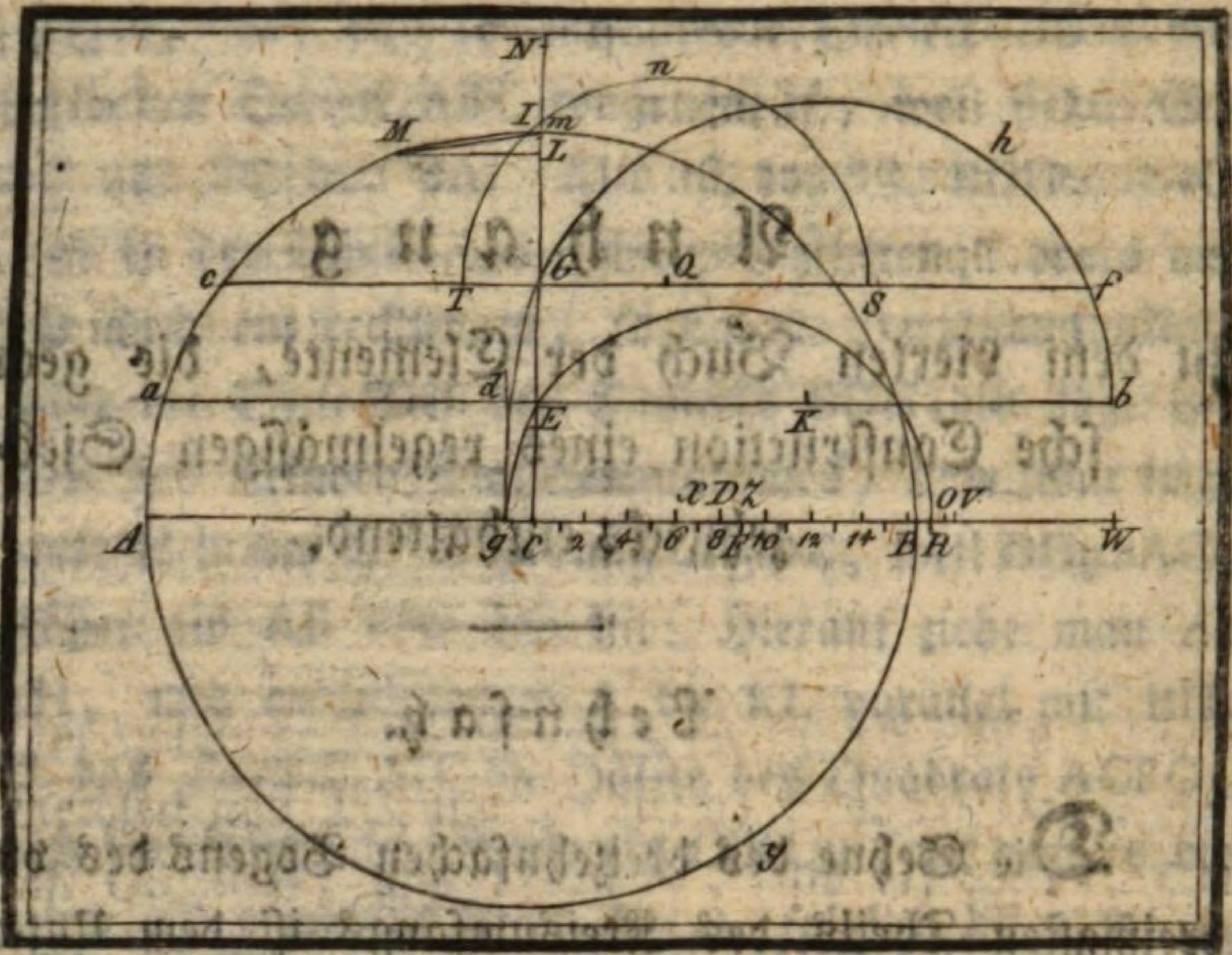
Beweis.

Dieser findet sich vom Herrn Professor Rothe analytisch-trigonometrisch ausgeführt, in dessen Programm: de divisione peripheriae circuli in 17 et 13 partes aequales, Erlangae, 1804. 4.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches oder regelmäßiges Siebzehneck zu beschreiben.

Der



Der gegebene Kreis sei AMmByC, dessen Durchmesser AB, und Halbmesser CA und CB. Man errichte aus dessen Mittelpunkt C auf dem Durchmesser AB die senkrechte CN von unbestimmter Länge, theile den Halbmesser CB in sechzehn gleiche Theile, mache CP einem solchen Theil gleich, und beschreibe aus dem Halbirungspunkt D des Halbmessers CB als Mittelpunkt mit dem Halbmesser DP (der $\frac{9}{16}$CB gleich ist,) den Halbkreis PER, welcher die senkrechte CN im Punkt E schneidet.

Ferner nehme man auf dem, nach W zu verlängerten Durchmesser AB die Linie BO$=\frac{2}{16}$CB oder $=\frac{1}{8}$CB, mache OF der doppelten CB gleich, und FZ$=\frac{1}{16}$CB, ziehe durch den Punkt E die Linie ab parallel mit AB, mache auf ihr Ed$=$FZ$=\frac{1}{16}$CB und dK der Hälfte der Linie AZ gleich, und beschreibe aus K, als Mittelpunkt, mit Kd, als Halbmesser, den Halbkreis dGhfb, der die senkrechte CN im Punkt G schneidet. Hierauf nehme man auf dem Halbmes-

messer CB eine Linie CX, die sechs Theilen dieses Halbmessers gleich ist, (nemlich $=\frac{6}{16}$CB,) mache XH der doppelten CE gleich, so wie auch die HW. Ferner nehme man WV=EG, ziehe durch den Punkt G die ef parallel mit AB, mache auf ihr GT=HV, GS=CH, und TQ= der halben ST, beschreibe hierauf aus Q, als Mittelpunkt, den Halbkreis TInS, welcher die senkrechte CN im Punkt I schneidet, und nehme von der GI ein Stück IL, welches $=\frac{1}{16}$CB ist, weg. Endlich erreichte man aus dem Punkt L auf der CN eine senkrechte Linie, welche den gegebenen Kreis im Punkt M schneidet, und ziehe die Sehne mM, so ist diese die verlangte Seite des im gegebenen Kreis zu beschreibenden regelmäßigen Siebzehnecks, welche also, in dem Umfang dieses Kreises herumgetragen, dem Umfang dieses Siebzehnecks geben wird.

Beweis.

Im Halbkreis REP ist das Quadrat der senkrechten EC dem Rechteck aus den Stücken PC und CR seines Durchmessers gleich. (Euklid, 2 Buch, 14 Satz.) Das heißt: $CE^2=PC.\,CR$. Nun ist aber $PC=\frac{1}{16}CB$, (nach der Construction,) und $CR=PR-PC=\frac{18}{16}CB-\frac{1}{16}CB=\frac{17}{16}CB$. Bezeichnet man ferner CB mit r, und CE mit a, so ist $a^2=\frac{1}{16}r.\,\frac{17}{16}r$, folglich $16.\,16\,a^2=r.\,17r$. Setzt man nun $16a=\alpha$, so ist $16.\,16a^2=\alpha^2$, und daher $\alpha^2=r.\,17r$, das heißt: α ist die Seite eines Quadrats, das dem Rechteck aus r und 17r gleich ist; und CE ist $=a=\frac{1}{16}\alpha$.

Im Halbkreis dGhfb ist das Quadrat der senkrechten EG dem Rechteck aus den Stücken dE und Eb seines Durchmessers bd gleich, das heißt. $EG^2=dE.\,Eb$. Nun ist $dE=FZ=\frac{1}{16}CB=\frac{1}{16}r$, (nach der Constr.) $dK=\frac{1}{2}AZ$; also $db=AZ=AC+CZ=r+CZ$. Aber CZ ist $=CF+FZ=$

CO

CO $-$ OF $+$ FZ $=$ CO $-$ 2CE $+$ FZ $=$ CO $+$ FZ $-$ 2CE $=$ CB $+$ BO $+$ FZ $-$ 2CE $= r + \frac{2}{16}r + \frac{1}{16}r - \frac{2}{16}\alpha = \frac{19}{16}r - \frac{2}{16}\alpha$. Daher ist cb, (da es $= r +$ CZ ist,) $= r + \frac{19}{16}r - \frac{2}{16}\alpha$, oder db $=$ $\frac{35}{16}r - \frac{2}{16}\alpha$, und da Eb $=$ db $-$ dE ist, so ist Eb $= \frac{35}{16}r - \frac{2}{16}\alpha -$ $\frac{1}{16}r$, d. i. Eb $= \frac{34}{16}r - \frac{2}{16}\alpha$. Bezeichnet man nun EG^2 mit b^2, so ist $b^2 =$ dE. Eb $= \frac{1}{16}r. (\frac{34}{16}r - \frac{2}{16}\alpha.)$ Also ist 16. 16 $b^2 = r(34r - 2\alpha.)$ Setzt man nun $16b = \beta$, so ist $\beta^2 = r$ $(34r - 2\alpha,)$ folglich β die Seite eines Quadrats, das einem Rechteck aus $34r - 2\alpha$ und r gleich ist, und b oder EG ist $= \frac{1}{16}\beta$.

Im Halbkreis TInS ist das Quadrat der senkrechten GI dem Rechteck aus TG und GS gleich, d. h. GI$^2 =$ TG. GS. Nun ist GS $=$ CH, und TG $=$ HV, also GI$^2 =$ HV. CH, aber HV ist $=$ CV $-$ CH, also ist GI$^2 =$ (CV $-$ CH) CH. Nun ist CV $=$ CX $+$ XH $+$ HW $-$ WV d. i. CV $= \frac{6}{16}r + \frac{2}{16}\alpha$ $+ \frac{2}{16}\alpha - \frac{1}{16}\beta$, (nach der Construction,) oder CV $= \frac{6}{16}r + \frac{4}{16}\alpha$ $- \frac{1}{16}\beta$, ferner ist CH $=$ CX $+$ XH $= \frac{6}{16}r + \frac{2}{16}\alpha$, also ist CV $-$ CH $= \frac{2}{16}\alpha - \frac{1}{16}\beta$, und daher (CV $-$ CH) CH $= (\frac{2}{16}\alpha - \frac{1}{16}\beta)$ $(\frac{6}{16}r + \frac{2}{16}\alpha,)$ folglich auch GI^2 oder $d^2 = (\frac{2}{16}\alpha - \frac{1}{16}\beta)(\frac{6}{16}r$ $+ \frac{2}{16},\alpha)$ und 16. $16d^2 = (2\alpha - \beta)(6r + 2\alpha.)$ Setzt man nun $16d = \delta$, so ist $\delta^2 = (2\alpha - \beta)(2\alpha + 6r,)$ folglich δ die Seite eines Quadrats, das einem Rechtek aus $6r + 2\alpha$ und $2\alpha - \beta$ gleich ist, und d oder GI ist $= \frac{1}{16}\delta$.

Nun ist CL $=$ CE $+$ EG $+$ GI $-$ IL, aber IL ist $= \frac{1}{16}r$, (nach der Construction,) also ist CL $= \frac{1}{16}\alpha + \frac{1}{16}\beta + \frac{1}{16}\delta -$ $\frac{1}{16}r$. Daher ist 2CL $= \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{8}\beta + \frac{1}{8}\delta - \frac{1}{8}r$. Folglich ist 2CL $=$ der Sehne von $\frac{13}{34}$p, (Lehnsatz,) also CL $=$ dem Sinus von $\frac{13}{68}$p $=$ dem Cosinus von $\frac{4}{68}$p oder von $\frac{1}{17}$p. Daher ist die auf dem Halbmesser Cm senkrechte LM der Sinus von $\frac{1}{17}$p, und folglich die Linie mM die Sehne des siebzehnten Theils des Kreisumfangs p, das heißt: die

Seite

Seite des im gegebenen Kreis beschriebenen regelmäßigen Siebzehnecks.

Anmerkung.

Durch ein ähnliches Verfahren kann man noch auf sieben Arten, mittelst der, in dem erwähnten Programm von Herrn Professor Rothe, Seite 14 bis 16 aufgestellten Formeln, den Cosinus des siebzehnten Theils des Kreisumfangs geometrisch construiren, und daher auch die Seite des regelmäßigen Siebzehnecks. Zum Beispiel mag die fünfte Formel, Seite 15, für den Cosinus des siebzehnten Theils des Kreisumfangs dienen, die Herr Professor Rothe für den Halbmesser $=1$, und den halben Kreisumfang $=\pi$ in folgender Form dargestellt hat:

$$\cos \tfrac{2}{17}\pi = \frac{(\alpha-1)(4+\gamma)}{64} + \frac{\delta}{16}$$

Also ist für den Halbmesser r

$$\cos \tfrac{1}{17}p = \frac{(\alpha-r)(\gamma+4r)}{64r} + \frac{\delta}{16}$$

$$\text{oder } \cos \tfrac{1}{17}p = \frac{(\alpha-r)(\gamma+4r)}{16.4r} + \frac{\delta}{16}$$

Es ist aber, (nach Seite 11 dieses Programms,) für den Halbmesser $=1$, $\sqrt{17}=\alpha$

$$\sqrt{(34+2\alpha)}=\gamma$$

und $\sqrt{[(2\alpha-\beta)(2\alpha+6)]}=\delta$

β aber ist $=\sqrt{(34-2\alpha)}$

Also für den Halbmesser r

1) $\alpha = r\sqrt{17} = \sqrt{17r^2} = \sqrt{17rr}$

und daher verhält sich $r:\alpha = \alpha:17r$, oder α ist die mittlere gem. Proportionallinie zwischen r und 17r, die, wie bekannt, nach dem 14 Satz des zweiten Buchs, oder nach dem

13 Satz des sechsten Buchs der Elemente Euklid's, leicht construirt werden kann.

2) $\gamma = r\sqrt{(34+2\alpha)} = \sqrt{r^2(34+2\alpha)} = \sqrt{r^2(34+2\sqrt{17})}$ $= \sqrt{r(34r+2r\sqrt{17})}$

und da $r\sqrt{17} = (\alpha$ für den Halbmesser r) ist, so ist

$$\gamma = \sqrt{r(34r+2\alpha)}$$

und daher verhält sich $r : \gamma = \gamma : 34r+2\alpha$, oder γ ist die mittlere geom. Proportionallinie zwischen r und $34r+2\alpha$.

Auf ähnliche Art findet man $r : \beta = \beta : 34r-2\alpha$.

3) $\delta = \sqrt{[(2\alpha-\beta)(2\alpha+6r)]}$

wenn α und β die für den Halbmesser r gefundenen Linien bedeuten. Daraus folgt die Proportion:

$$(2\alpha-\beta) : \delta = \delta : (2\alpha+6r)$$

Nun war $\cos \frac{1}{17}p = \frac{(\alpha-r)(\gamma+4r)}{16.\,4r} + \frac{\delta}{16} = \mu + \frac{\delta}{16}$

Aber μ kann durch folgende Proportion gefunden werden, (12 Satz, 6 Buch, in Euklid's Elementen:)

$$4r : (\tfrac{1}{4}\alpha - \tfrac{1}{4}r) = (\tfrac{1}{4}\gamma + r) : \mu$$

Also ist die geometrische Construction des Cosinus vom siebzehnten Theil des Kreisumfangs mittelst der angewandten Proportionen gefunden, folglich auch die Construction des regelmäßigen Siebzehnecks, mittelst der fünften Rothe'schen trigometrischen Formel.

Auf ähnliche Art findet man nach der achten trigometrischen Formel,

$$\cos \frac{2}{17}\pi = \frac{K}{64} + \frac{\lambda\eta}{64.4} = \frac{K}{64} + \omega$$

in der $K = (\alpha-1)(\gamma+4)$, $\lambda = 3\gamma+8+\alpha\gamma$ und $\eta = \sqrt{[(2\alpha-\gamma)(2\alpha-6)]}$ ist, die Linien durch folgende geometr. Proportionen, für den Halbmesser r,

1) für α,) $r : \alpha = \alpha : 17r$ (wie vorhin,)

2) für γ) $r : \gamma = \gamma : (34r+2\alpha)$ (wie vorhin,)

3) für $\left(\frac{\varkappa}{64}\right)$ $4r : (\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}r) = (\frac{1}{4}\gamma + r) : \frac{\varkappa}{64}$ (wie vorhin,)

4) (für $\alpha\gamma$) $r : \alpha = \gamma : \varphi$ und $8r : \alpha = \gamma : \frac{1}{8}\varphi$

also ist $\lambda = 3\gamma + 8r + \varphi$ und $\frac{1}{8}\lambda = \frac{3}{8}\gamma + \frac{1}{8}\varphi + r$

5) (für η) $(2\alpha + \gamma) : \eta = \eta : (2\alpha - 6r)$

6) für ω) $4r : \frac{1}{8}\lambda = \frac{1}{8}\eta : \omega$

oder $4r : (\frac{3}{8}\gamma + \frac{1}{8}\varphi + r) = \frac{1}{8}\eta : \omega$

Da nun $\frac{\varkappa}{64} + \omega = \cos \frac{1}{17}p$ ist, so kann auch, mittelst dieser Proportionen, der Cosinus des 17ten Theils des Kreisumfangs, und folglich die Seite des regelmäsigen Siebzehnecks construirt werden. Indessen ist die erste, von mir ausgeführte Construction die einfachste.

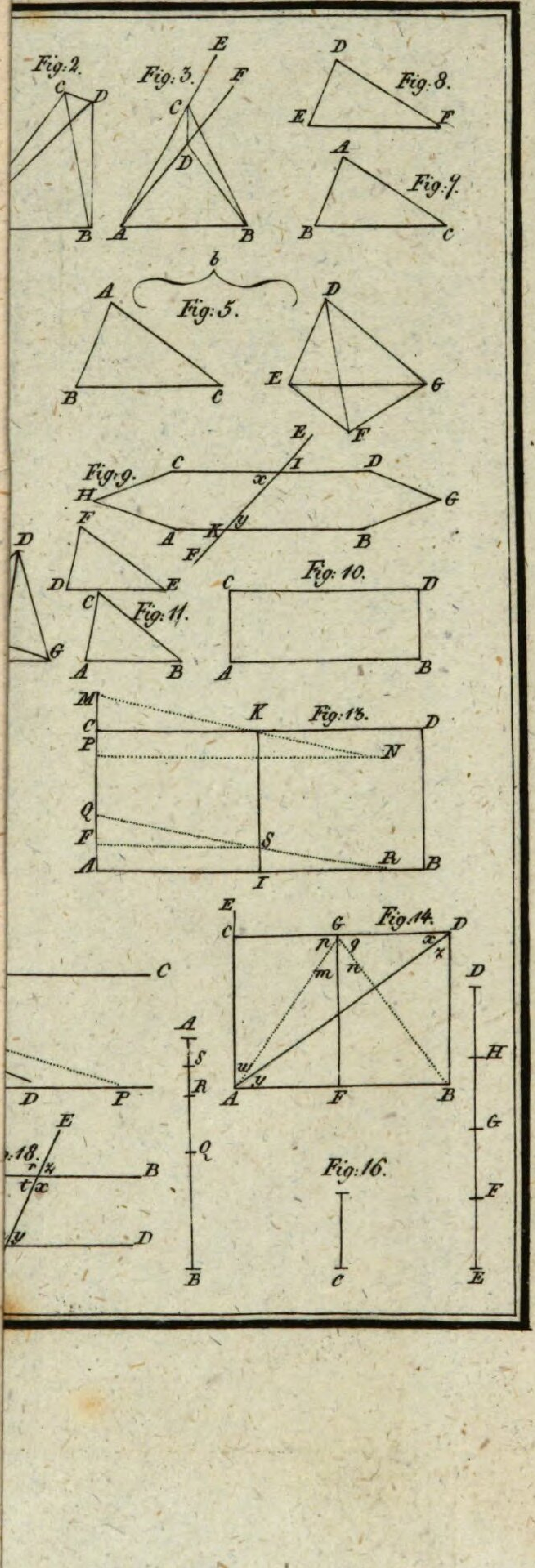
Uibrigens ist bekannt, daß Gauß gefunden hat, daß ausser dem regelmäsigen Siebzeheck, jedes regelmäßige Vieleck, dessen Seitenzahl m eine solche Primzahl ist, die aus der Summe von Eins und einer Potenz der Zwei besteht, (nemlich wenn $m = 2^n + 1$, eine Primzahl ist, wie 3, 5, 17, 257, 65537 u. s. f.) blos durch Anwendung der geraden Linie und des Kreises, in einen gegebenen Kreis beschrieben werden kann. Folglich scheinen die Aufgaben: ein regelmäsiges Siebzeheck, 257 Eck, 65537 Eck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben zu Euklid's Elementargeometrie zu gehören, wie die: ein regelmäsiges Dreieck oder Fünfeck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, welche im vierten Buch seiner Elemente vorgetragen worden sind.

Allein, wenn die Aufgabe ein regelmäsiges Siebzehneck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, unter die Sätze, welche nach dem Begriff der alten Griechischen Geometer zur Elementargeometrie gehören, aufgenommen werden soll, so muß der Beweis des vorhin vorgetragenen

Lehn-

Lehnsatzes *synthetisch* ausgeführt seyn. So lange dieser synthetische Beweis nicht gefunden ist, fehlt die Befugniß, diese Aufgabe an die Sätze der Elemente Euklid's zu reihen, ob sie gleich als ein Anhang ihnen beigefügt werden mag. Es verhält sich ohngefähr damit, wie mit der *algebraischen* Herleitung, und der von Euklid gebrauchten *synthetischen* Behandlung der Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben. Wenn daher manche neuern Mathematiker den Satz: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nur *analytisch*, (vermittelst der Buchstabenrechnung,) herleiten, oder wohl nur *arithmetisch*, (in bestimmten Zahlen,) darstellen, durch Betrachtung der Entstehungsart, oder der Zusammensetzung der einzelnen Theile, (solche als Partialproducte behandelt) den Beweis führen, und den auf *diese* Art bewiesenen Satz in demjenigen Theil der Elementargeometrie, der die *absoluten*, (nicht gemessenen, und in Absicht auf die Quantität durch eine Zahl bestimmten) räumlichen Gegenstände behandelt, anwenden, zum Beispiel: bei einem Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, und diesen Beweis einen *arithmetischen* nennen, so überschreiten sie die Grenzen der Sphäre dieses Theils der Geometrie, den Euklid genau von dem andern Theil, in welchem er die gemessenen Größen betrachtet, absonderte, verwirren die Begriffe des Lehrlings, statt sie zu ordnen und zu berichtigen, und begehen diesen Fehler der μεταβασις ἐις αλλο γενος hier, ohne sich mit der Schwierigkeit der synthetischen Darstellung entschuldigen zu können, denn der angeführte Satz, von der Beschaffenheit gewisser Theile eines Quadrats, dessen Seite zwei Abschnitte hat, ist, wie jeder angehende Mathematiker weiß, im zweiten Buch der Elemente Euklid's, auf ein so leichte und einfache Art synthetisch erwiesen, daß er von dem durch die Anschauung geleiteten Lehrling nicht nur weit eher gefaßt wird, sondern für ihn auch eine viel größere Evidenz hat, als die arithmetische oder algebraische Ausführung.

Zu Müllers I.B. d. Euclids.



Fuch

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann W.

Mathematisch critische Bearbeitung des ersten Büchs der Elemente Euklid's
Mit 1 Kupfertaf

Nürnberg 1821

A.gr.b. 1477
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10235973-4